LINEAS PROPORCIONALES EN LOS TRIANGULOS.

525.—*Varias rectas* A B, A C, A D *y* A E *que parten de un mismo punto* A *son cortadas en partes proporcionales por dos paralelas* B E *y* F G.

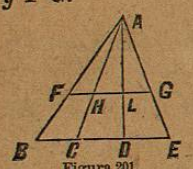

Figura 201.

Comparando los lados homólogos de los triángulos A B C y A F H; A C D y A H L; A D E y A L G que son semejantes por ser equiángulos, se tiene:

A B : A F :: A C : A H

A C : A H :: A D : A L

A D : A L :: A E : A G

y como la última razón de cada proporción es la primera de la siguiente, se tiene:

A B : A F :: A C : A H :: A D : A L :: A E : A G

que es lo que se tenía que demostrar.

526.—*Dos paralelas* F G *y* B E *quedan cortadas en partes proporcionales por varias rectas* A B, A C, *etc., que concurren en un punto* A. (Fig. 201).

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes, se tiene:

A C : A H :: B C : F H
A C : A H :: C D : H L
luego B C : F H :: C D : H L (1)
A D : A L :: C D : H L
A D : A L :: D E : L G
luego C D : H L :: D E : L G (2)

comparando las proporciones (1) y (2) se tiene por último:

B C : F H :: C D : H L :: D E : L G

que es lo que se tenía que demostrar.

527.—*Recíprocamente siempre que dos paralelas* A E *y* B F *sean cortadas en partes proporcionales por varias oblícuas* A B, C D, E F, *prolongándolas, concurrirán en un mismo punto* O (fig. 202).

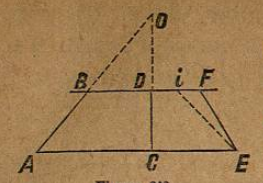

Figura 202.

Prolongando A B y C D concurrirán en el punto O, y si supusiéramos que E F prolongada no concurriera en el mismo punto O, debería concurrir otra recta que partiendo de E pasará á la derecha ó á la izquierda de F como E i, y en tal concepto, conforme á la hipótesis del teorema se tiene:

A C : B D :: C E : D F

y por suponerse que E i prolongada concurre en O (526) se tendría.

A C : B D :: C E : D i

Siendo los tres primeros términos de estas proporciones iguales, tendrá que serlo el cuarto, esto es, D i=D F lo que es un absurdo y prueba que E i no concurrirá en el punto O á menos que coincida con E F.

528.—*En todo triángulo* A B C (fig. 203) *la bisectriz* B O *de un ángulo divide el lado opuesto* A C *en partes directamente proporcionales á los lados* A B *y* B C *del ángulo* A B C.

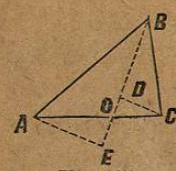

Figura 203.

Desde C y A bájense las perpendiculares C D y A E á la bisectriz B O prolongada, y resultarán los triángulos A B E y B C D semejantes, por ser ambos rectángulos y tener el ángulo A B E=C B D (515). Como en triángulos semejantes los lados homólogos son proporcionales, tendrémos A B opuesto á E, es con su homólogo B C, opuesto al ángulo B D C, como A E opuesto á A B E es con su homólogo C D, opuesto á C B D.

A B : B C :: A E : C D.

Por otra parte, los triángulos A O E y O C D son semejantes por tener el ángulo E=C D O por rectos, y A O E=C O D por opuestos al vértice. Comparando los lados homólogos de estos triángulos, lo que se hace buscando los lados que están opuestos á los ángulos iguales, tendrémos:

A E : C D :: A O : C O

suprimiendo la razón común entre ésta y la anterior proporción, resultará

A B : B C :: A O : C O

proporción que demuestra la verdad del teorema.

dos, más el doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre éste.

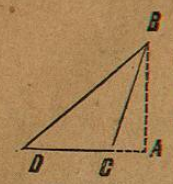

Figura 206.

Esto es, si desde el vértice B (fig. 206) bajamos la perpendicular B A sobre el lado D C prolongado, C A será la proyección del lado B C sobre D C, y deberá tenerse

$$D\,B^2=B\,C^2+D\,C^2+2\,D\,C\times C\,A$$

Demostración.—Considerando el triángulo rectángulo A B D se tiene:

$$D\,B^2=B\,A^2+A\,D^2\ldots.(1)$$

Determinarémos los valores de $B\,A^2$ y de $A\,D^2$, y en seguida los sustituirémos en esta ecuación. El triángulo rectángulo B C A nos da

$$B\,A^2=B\,C^2-C\,A^2$$

y

$$A\,D^2=(A\,C+C\,D)^2=A\,C^2+2\,A\,C\times C\,D+C\,D^2$$

sustituyendo los valores de $B\,A^2$ y de $A\,D^2$ en la ecuación (1) se obtiene:

$$D\,B^2=B\,C^2-C\,A^2+A\,C^2+2\,A\,C\times C\,D+C\,D^2$$

reduciendo, resulta la siguiente ecuación:

$$D\,B^2=B\,C^2+D\,C^2+2\,A\,C\times C\,D$$

que es la expresión del teorema que tratábamos de demostrar.

534.—*En un triángulo oblicuángulo, el cuadrado de un lado opuesto al ángulo agudo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre éste.*

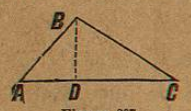

Figura 207.

Esto es, si desde el vértice B (fig. 207) bajamos la perpendicular B D sobre A C, D C será la proyección del lado B C sobre A C, y se tendrá

$$A\,B^2=B\,C^2+A\,C^2-2\,A\,C\times D\,C$$

Demostración.—En el triángulo rectángulo A B D se tiene

$$A\,B^2=B\,D^2+A\,D^2\ldots.(1)$$

Determinarémos los valores de $B\,D^2$ y de $A\,D^2$ para sustituirlos en esta expresión. El triángulo rectángulo B D C da

$$B\,D^2=B\,C^2-D\,C^2$$

y

$$A\,D^2=(A\,C-D\,C)^2=A\,C^2-2\,A\,C\times D\,C+D\,C^2$$

sustituyendo los valores de $B\,D^2$ y $A\,D^2$ en la ecuación (1) se obtiene

$$A\,B^2=B\,C^2-D\,C^2+A\,C^2-2\,A\,C\times D\,C+D\,C^2$$

reduciendo resulta:

$$A\,B^2=B\,C^2+A\,C^2-2\,A\,C\times D\,C$$

con lo que queda demostrado el teorema.

535.—Así, pues, conforme á los dos últimos teoremas y al del número 531, el cuadrado de un lado de un triángulo es *mayor, igual ó menor* que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, según que el ángulo opuesto es *obtuso, recto ó agudo.* Si representamos por a, b y c los lados del triángulo, y por p la proyección del lado c sobre b tendrémos:

$a^2=b^2+c^2+2\,b\,p$ cuando A es *obtuso.*
$a^2=b^2+c^2$,, A es *recto.*
$a^2=b^2+c^2-2\,b\,p$,, A es *agudo.*

Estas fórmulas servirán para calcular el valor de un lado, ó para determinar la especie del ángulo opuesto, cuando se conocen las otras cantidades que entran en ellas. Recíprocamente siempre que el cuadrado de un lado, a^2 sea igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto, A, será recto; si es mayor, el ángulo A, será obtuso; y si es menor, el ángulo, A, será agudo.

536.—Problemas de líneas proporcionales.—I.—*Dividir una recta* A B (fig. 208) *en partes proporcionales á las de otra dada* m p.

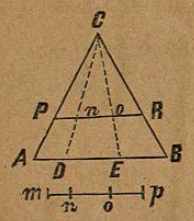

Figura 208.

Constrúyase sobre A B un triángulo equilátero A C B; desde el vértice C llévese una línea C P= m p, y sobre ella constrúyase el triángulo equilátero C P R. Siendo P R=m p sobre ella se llevarán las partes P n, n o, y o R respectivamente iguales á m n, n o y o p, y tirando desde C las rectas C n y C o, prolongadas determinarán sobre A B partes proporcionales á las de la recta dada (526).

II. *Dividir la recta* A B *en 5 partes iguales* (fig. 209).

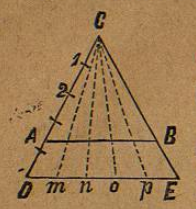

Figura 209

Sobre A B constrúyase el triángulo equilátero A B C desde C y sobre C A llévense cinco partes iguales, prolongando este lado si fuere necesario; tómese C E =C D y tirando D E se tendrá el triángulo equilátero C D E; llévense de D á E cinco partes iguales á las tomadas sobre C D y reuniendo los puntos de división m, n, o, p con C, quedará dividida A B en cinco partes iguales (526).

III. *Dividir una recta* A B (fig. 210) *en partes proporcionales á dos rectas dadas* m *y* n.

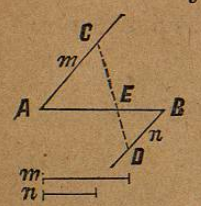

Figura 210.

Por el punto A tírese la recta A C indefinida, y por B la paralela B D; sobre la primera tómese A C=m y sobre la segunda B D=n; reúnase C con D y la recta A B quedará dividida en E en partes A E y B E proporcionales á *m* y *n*.

En efecto, los triángulos A E C y B E D son semejantes por tener iguales los ángulos A y B por alternos internos, y los en E por opuestos al vértice (515); luego sus lados homólogos serán proporcionales.

A C : B D :: A E : E B

sustituyendo

m : n :: A E : E B

IV. *Tirar una tangente interior común á dos círculos dados.*

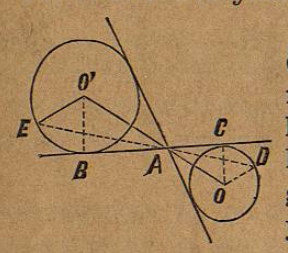

Figura 211.

Si suponemos el problema resuelto por medio de la recta B C (fig. 211), tangente común á los dos círculos, y tiramos la línea de los centros O O' y los radios O C y O' B á los puntos de contacto, resultarán dos triángulos A O C y A O' B que serán semejantes, y nos servirán para determinar el punto A de la línea de los centros por donde debe pasar la tangente pedida.

Los triángulos A O C y A O' B son semejantes por ser rectángulos y tener iguales los ángulos en A por opuestos al vértice. Siendo semejantes, sus lados homólogos serán proporcionales; luego

O C : O' B :: O A : O' A

Esta proporción nos indica, que para determinar el punto A por donde debe pasar la tangente interior común á los dos círculos, basta dividir la línea de los centros O O' en partes proporcionales á los radios, lo cual nos sirve de fundamento á la siguiente

Construcción.—Tírese en uno de los círculos un radio cualquiera O D, y en el otro círculo un radio que le sea paralelo en sentido contrario O' E, y tirando la recta E D ésta dividirá la línea O O' de los centros en partes proporcionales á los radios, supuesto que comparando los triángulos semejantes A O D y A O' E se tiene

O D : O' E :: O A : O' A

Por tanto, si desde el punto A así determinado, se tira una tangente á uno de los círculos, ésta será también tangente al otro.

V. *Tirar una tangente exterior común á dos círculos dados.*

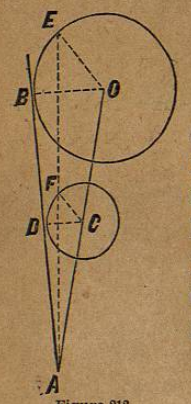

Figura 212.

Si por medio de la B D (fig. 212), tangente exterior común á los dos círculos, suponemos resuelto el problema, y tiramos la línea de los centros O C y los radios O B y C D, prolongando la tangente y la línea de los centros resultarán los triángulos semejantes O B A y C D A, que nos servirán para determinar el punto A de la línea de los centros por el que debe pasar la tangente pedida.

Los triángulos O B A y C D A son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo en A común. Siendo semejantes sus lados homólogos, serán proporcionales, luego

O B : C D :: O A : C A

dividiendo

O B—C D : C D :: O C : C A

Esta proporción nos indica que el punto donde concurre la tangente exterior con la línea de los centros, debe ser tal, que pueda establecerse la siguiente proporción: la diferencia de los radios es al radio menor, como la línea de los centros es á su prolongación, en la cual solo el cuarto término es desconocido. Esta propiedad nos servirá de fundamento para la siguiente

Construcción.—Tírese un radio cualquiera O E, y por el punto C otro en el mismo sentido que le sea paralelo C F, reuniendo E con F y prolongando E F hasta su intersección con la línea de los centros se determinará el punto A, desde el cual si se tira una tangente exterior á uno de los círculos, lo será también al otro.

En efecto, en los triángulos O B A y C D A acabamos de ver que se tiene:

O B : C D :: O A : C A

dividiendo

O B—C D : C D :: O C : C A....(1)

y en los triángulos O E A y C F A

O E : C F :: O A : C A

dividiendo

O E—C F : C F :: O C : C A....(2)

siendo iguales los tres primeros términos de las proporciones (1) y (2) tendrá que serlo el cuarto.

VI.—*Dadas dos rectas* A B *y* C D (fig. 213) *que no pueden prolongarse, tirar por un punto* O *una recta que pase por su punto de concurso.*

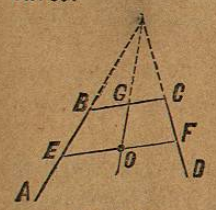

Figura 213.

Por el punto O tírese una recta cualquiera E F, en seguida trácese la paralela B C, y dividiendo esta recta en partes proporcionales á E O y O F, se determinará el punto G (536 III). La recta O G pasará por el punto desconocido de concurso (527).

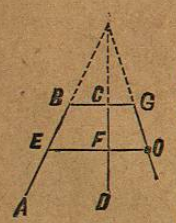

Figura 214.

Si el punto O es exterior (fig. 214), se tirará la recta O E; por B se hará pasar una paralela indefinida, y construyendo una cuarta proporcional á las rectas E F, F O y B C, que llevarémos de C á G, tendrémos resuelto el problema por la recta O G, que será la pedida (527).

VII.—*Construir una tercera proporcional* (fig. 215) *á dos líneas dadas* m *y* n.

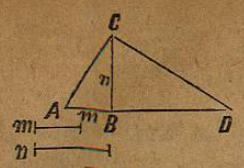

Figura 215.

Sobre A B=m levántese la perpendicular B C =n; tírese A C, y levantando por la extremidad C la perpendicular C D y prolongando A B, se tendrá que B D es la tercera proporcional pedida. En efecto, en el triángulo A C D se tiene (530—2°)

A B : B C :: B C : B D

sustituyendo

m : n :: n : B D

LINEAS PROPORCIONALES EN EL CIRCULO.

537.—*Dos cuerdas que pasan por un punto interior* O (fig. 216) *de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.*

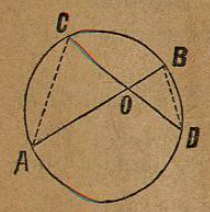

Figura 216.

Se dice que dos rectas se cortan en partes recíprocamente proporcionales, cuando las dos partes de una recta forman los extremos de una proporción, y las otras dos partes los medios. Así en el presente caso se debe demostrar que

A O : O D :: O C : O B

Tirando las cuerdas C A y B D resultan los triángulos A O C y B O D, que serán semejantes en virtud de que el ángulo C=B por tener la misma medida, y A=D por igual razón. Siendo semejantes, los lados homólogos serán proporcionales, y comparando los lados opuestos á los ángulos iguales, se infiere que

A O : O D :: O C : O B

que es lo que se debía demostrar.

538.—*La ordenada* C D (fig. 217) *al diámetro en un punto cualquiera* C, *es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*

529.—*La bisectriz del ángulo exterior* C B E (fig. 204) *de un triángulo escaleno corta el lado* A C *prolongado, en un punto* F, *cuyas distancias á los puntos* A *y* C *son proporcionales á los lados del ángulo* B. *Esto es:*

F A : F C :: B A : B C

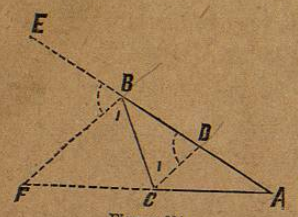

Figura 204.

Demostración.—Si por C tiramos C D paralela á la bisectriz B F, se tiene (510, 2°):

A F : F C :: A B : B D

pero el triángulo B C D es isósceles, por tener el ángulo B D C=E B F por correspondientes, y B C D=F B C por alternos internos, y como E B F=F B C por mitades de E B C; B D C= B C D, de lo que se infiere que B D=B C.

Sustituyendo en la anterior proporción, resultará:

A F : F C :: A B : B C

proporción que demuestra la verdad del teorema.

Si el triángulo fuera isósceles ó equilátero, teniendo A=C, la bisectriz B F sería paralela al lado A C y no podría cortarla.

530.—*Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verificarán tres cosas:* 1° *los triángulos parciales serán semejantes al triángulo total, y semejantes entre sí:* 2° *la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa: y* 3° *cada lado del ángulo recto es medio proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento adyacente.*

Figura 205.

1° Para demostrar la primera parte del teorema, tenemos en la figura 205 que el triángulo parcial A C D es semejante al total A B C porque tienen el ángulo C común y ambos son rectángulos (515). El otro triángulo parcial A D B es semejante al total porque tienen el ángulo B común y son ambos rectángulos. Siendo cada uno de los triángulos parciales semejante al total, serán semejantes entre sí.

2° Para demostrar que la perpendicular A D es media proporcional entre los dos segmentos C D y B D de la hipotenusa, bastará comparar los lados homólogos, buscando como antes lo hemos explicado (528), los opuestos á ángulos iguales, de los triángulos A C D y A D B y se tiene:

C D : A D :: A D : D B

3° Para demostrar la tercera parte del teorema basta comparar los lados homólogos de uno de los triángulos parciales con el total:

Comparando A C D C D : A C :: A C : C B
Idem A D B B D : A B :: A B : C B

Los segmentos C D y B D que determina la perpendicular A D vienen á ser respectivamente *proyecciones* de los lados A C y A B.

Se llama *proyección* de un punto el pié de la perpendicular bajada desde el punto sobre un plano ó sobre una recta.

La *proyección* de una recta es la serie de las proyecciones de todos sus puntos.

En la fig. 205 la proyección de la recta A C es C D, confundiéndose el extremo C con su proyección.

531.—*El valor numérico del cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.*

Si en las dos últimas proporciones del teorema anterior formamos el producto de extremos y lo igualamos al de los medios, se tiene:

$$C\,D \times C\,B = A\,C^2$$
$$B\,D \times C\,B = A\,B^2$$

sumando estas ecuaciones y sacando á C B como factor común, resulta:

$$(C\,D + B\,D)\,C\,B = A\,C^2 + A\,B^2$$

pero como en la figura: C D+B D=C B, sustituyendo obtendrémos

$$C\,B^2 = A\,C^2 + A\,B^2$$

que es lo que debíamos demostrar.

Debemos repetir que el producto de dos líneas, así como la segunda potencia de una recta, generalmente es el producto de los números que expresan las relaciones entre la magnitud de cada una de estas líneas y la magnitud de la unidad de longitud.

532.—De aquí se infiere que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto;* pues despejando en la última ecuación á $A\,C^2$ ó á $A\,B^2$ se tiene:

$$A\,C^2 = C\,B^2 - A\,B^2 \text{ y } A\,B^2 = C\,B^2 - A\,C^2$$

533.—*En un triángulo oblicuángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos la-*