Construcción.—Tírese un radio cualquiera O E, y por el punto C otro en el mismo sentido que le sea paralelo C F, reuniendo E con F y prolongando E F hasta su intersección con la línea de los centros se determinará el punto A, desde el cual si se tira una tangente exterior á uno de los círculos, lo será también al otro.

En efecto, en los triángulos O B A y C D A acabamos de ver que se tiene:

O B : C D :: O A : C A

dividiendo

O B—C D : C D :: O C : C A....(1)

y en los triángulos O E A y C F A

O E : C F :: O A : C A

dividiendo

O E—C F : C F :: O C : C A....(2)

siendo iguales los tres primeros términos de las proporciones (1) y (2) tendrá que serlo el cuarto.

VI.—*Dadas dos rectas* A B *y* C D (fig. 213) *que no pueden prolongarse, tirar por un punto* O *una recta que pase por su punto de concurso.*

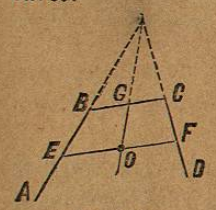

Figura 213.

Por el punto O tírese una recta cualquiera E F, en seguida trácese la paralela B C, y dividiendo esta recta en partes proporcionales á E O y O F, se determinará el punto G (536 III). La recta O G pasará por el punto desconocido de concurso (527).

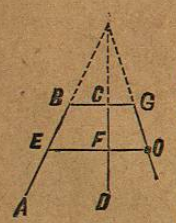

Figura 214.

Si el punto O es exterior (fig. 214), se tirará la recta O E; por B se hará pasar una paralela indefinida, y construyendo una cuarta proporcional á las rectas E F, F O y B C, que llevarémos de C á G, tendrémos resuelto el problema por la recta O G, que será la pedida (527).

VII.—*Construir una tercera proporcional* (fig. 215) *á dos líneas dadas* m *y* n.

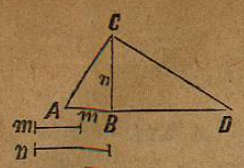

Figura 215.

Sobre A B=m levántese la perpendicular B C =n; tírese A C, y levantando por la extremidad C la perpendicular C D y prolongando A B, se tendrá que B D es la tercera proporcional pedida. En efecto, en el triángulo A C D se tiene (530—2°)

A B : B C :: B C : B D

sustituyendo

m : n :: n : B D

LINEAS PROPORCIONALES EN EL CIRCULO.

537.—*Dos cuerdas que pasan por un punto interior* O (fig. 216) *de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.*

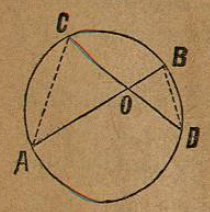

Figura 216.

Se dice que dos rectas se cortan en partes recíprocamente proporcionales, cuando las dos partes de una recta forman los extremos de una proporción, y las otras dos partes los medios. Así en el presente caso se debe demostrar que

A O : O D :: O C : O B

Tirando las cuerdas C A y B D resultan los triángulos A O C y B O D, que serán semejantes en virtud de que el ángulo C=B por tener la misma medida, y A=D por igual razón. Siendo semejantes, los lados homólogos serán proporcionales, y comparando los lados opuestos á los ángulos iguales, se infiere que

A O : O D :: O C : O B

que es lo que se debía demostrar.

538.—*La ordenada* C D (fig. 217) *al diámetro en un punto cualquiera* C, *es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*

suprimiendo la razón común de estas dos proporciones, se tiene:

$$A\,B\,C\,D\ldots : a\,b\,c\,d\ldots :: O\,A : o\,a$$

Considerémos ahora los polígonos circunscritos á las circunferencias trazadas con puntos. Tiremos los radios rectos y oblícuos O G y O D, o g y o d, y resultarán los triángulos O G D y o g d, que serán semejantes por equiángulos, por lo que

$$O\,G : o\,g :: O\,D : o\,d$$

Antes teníamos

$$A\,B\,C\,D\ldots : a\,b\,c\,d\ldots :: O\,D : o\,d$$

luego $$A\,B\,C\,D\ldots : a\,b\,c\,d\ldots :: O\,G : o\,g$$

544.—Problemas de líneas proporcionales en el círculo.—I. *Construir una media proporcional entre dos líneas dadas:* m, n.

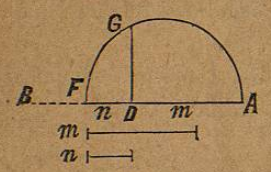

Figura 222.

1ª Construcción.—(Fig. 222). Sobre una recta indefinida A B se toman A D=m, y á continuación D F=n; sobre A F como diámetro se traza una semicircunferencia y se levanta en D la perpendicular D G, la cual será la media proporcional entre A D y D F (538), que hemos tomado respectivamente iguales á m y n.

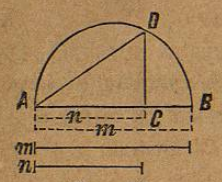

Figura 223.

2ª Construcción.—(Fig. 223). Tómese A B igual á la recta mayor m, sobre esta recta como diámetro trácese una semicircunferencia, llévese sobre el diámetro A B la parte A C=n, levántese en el punto C la perpendicular C D, y tirando la cuerda A D, ésta será la media proporcional pedida (539).

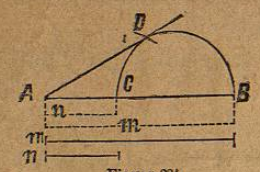

Figura 224.

3ª Construcción.—(Fig. 224). Tómese A B igual á la recta mayor m, llévese sobre ella A C= n, y sobre C B igual á la diferencia entre m y n trácese una semicircunferencia. Si tiramos A D tangente á esta semicircunferencia, esta recta A D será la media proporcional pedida (541).

II.—*Dividir una línea dada* A B (fig. 225) *en media y extrema razón.*

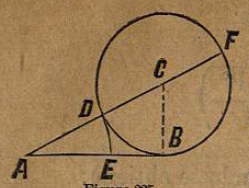

Figura 225.

Construcción.—Por el extremo B de la recta se levantará una perpendicular C B=$\frac{AB}{2}$; haciendo centro en C y con el radio B C trácese una circunferencia de círculo; tírese la secante A F que pase por el centro del círculo, y si desde A como centro con el radio A D se describe el arco D E, la recta A B quedará dividida en E en média y extrema razón.

Demostración.—Habiendo tomado el radio C B=$\frac{AB}{2}$, la tangente A B será igual al diámetro, y además es media proporcional entre A F y A D (541), por lo cual tendrémos

	$AF : AB :: AB : AD$
sustituyendo	$AF : DF :: AB : AE$
Dividiendo	$AF-DF : DF :: AB-AE : AE$
sustituyendo	$AE : AB :: EB : AE$
invirtiendo	$AB : AE :: AE : EB$

luego la parte mayor A E será media proporcional entre toda la recta y su parte menor.

III.—*Estando inscrito al círculo un polígono regular* A B C D (fig. 226) *inscribir en el mismo círculo otro polígono de un número doble de lados, y encontrar el valor de uno de los lados del segundo polígono.*

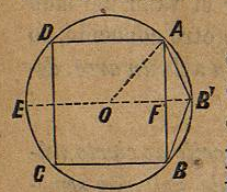

Figura 226.

Dividamos por la mitad el arco A B en B', y tiremos las cuerdas A B' y B B' éstas serán los lados del polígono pedido. La primera parte del problema quedará resuelta, si partiendo de los vértices del polígono llevamos la cuerda A B' por toda la circunferencia. (501—III y IV).

Para determinar el valor del lado A B' en función de A B y del radio del círculo, se tiene (539):

$$AB'^2=B'E\times B'F\ldots(1)$$

por otra parte

$$B'F=B'O-OF=B'O-\sqrt{AO^2-AF^2}\quad(532)$$

y como A F=$\frac{AB}{2}$

$$B'F=B'O-\sqrt{AO^2-\frac{AB^2}{4}}$$

sustituyendo este valor en la ecuación (1), se tiene:

$$A\,B'^2 = B'\,E\left(B'\,O - \sqrt{A\,O^2 - \frac{A\,B^2}{4}}\right)$$

si hacemos A B=a, A O=r, y A B'=x, sustituyendo se obtiene:

$$x^2 = 2\,r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}\right) = 2\,r^2 - 2\,r\sqrt{\frac{4\,r^2 - a^2}{4}}$$

y extrayendo raíz

$$x = \sqrt{2\,r^2 - r\sqrt{4\,r^2 - a^2}} \ldots\ldots (2)$$

cuya fórmula nos dará el valor de x.

En el caso de que el radio sea igual á la unidad, la fórmula (2) se convertirá en

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}},$$

ó á fin de hacerla más propia para ser calculable por logaritmos (251—III).

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{(2 + a)\,(2 - a)}} \ldots\ldots (3)$$

las fórmulas (2) y (3) nos servirán para determinar el valor del lado del polígono regular de un número doble de lados de otro conocido, lo cual equivale á resolver este problema: *dada la cuerda* a *de un arco, determinar la cuerda* x *del arco de su mitad.*

IV.—*Dado el perímetro de un polígono regular inscrito de cierto número de lados, determinar la longitud del perímetro del polígono semejante circunscrito.*

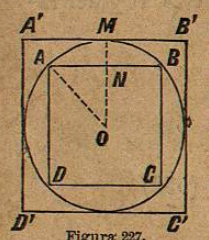

Figura 227.

Conocida la longitud del perímetro A B C D (fig. 227), y el número de lados, podrá fácilmente obtenerse el valor de un lado. Como además se conoce el radio del círculo en que están inscritos y circunscritos los polígonos, el problema tiene por objeto determinar el perímetro A' B' C' D' en función del radio, del perímetro y del lado del polígono inscrito.

Siendo los polígonos semejantes, si llamamos p el perímetro del polígono inscrito, P el del circunscrito, r el radio O M=O A del círculo y a el lado A B; tendrémos: (523).

$$P : p :: O\,M : O\,N$$

de donde $$P = \frac{r\,p}{O\,N}$$

en el triángulo rectángulo O N A se tiene: (532)

$$O\,N = \sqrt{O\,A^2 - A\,N^2} = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

sustituyendo en la ecuación anterior resulta:

$$P = \frac{r\,p}{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}} = \frac{r\,p}{\sqrt{\frac{4r^2 - a}{4}}} = \frac{2\,r\,p}{\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

esto es (251—III) $$P = \frac{2\,r\,p}{\sqrt{(2r + a)\,(2r - a)}} \ldots\ldots (1)$$

si se tiene el radio igual á la unidad esta fórmula se convierte en

$$P = \frac{2\,p}{\sqrt{(2 + a)\,(2 - a)}} \ldots\ldots (2)$$

Las fórmulas (1) y (2) en sus respectivos casos nos servirán para resolver el problema propuesto, sustituyendo por a y por p sus valores que son conocidos.

RAZON DEL DIAMETRO A LA CIRCUNFERENCIA.

545.—*El círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, infinitamente pequeños.*

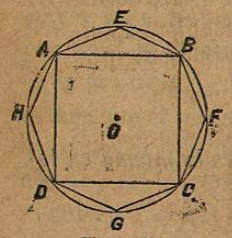

Figura 228.

Si consideramos el cuadrado A B C D inscrito en el círculo (fig. 228), tendrémos que por ser la línea recta la menor distancia entre dos puntos, cada uno de los lados del polígono será menor que el arco respectivo que subtende; luego la suma de los cuatro lados ó el perímetro A B C D será menor que la circunferencia.

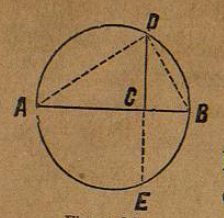

Figura 217.

Esto es, que:

A C : C D :: C D : C B

Como se habrá comprendido, se llama *ordenada* la perpendicular C D levantada en un punto del diámetro y que termina en la circunferencia.

Prolongada esta ordenada, el teorema anterior conduce á la siguiente proporción:

A C : C D :: C E : C B

pero como C D= C E (477)

resulta

A C : C D :: C D : C B

539.—Si se tiran las cuerdas A D y B D, como el ángulo A D B es recto (485); resulta por el teorema anterior que en el triángulo rectángulo la perpendicular C D es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa. Además (530—3°) en el mismo triángulo se tiene:

A B : A D :: A D : A C

luego *toda cuerda tirada por el extremo del diámetro es media proporcional entre todo el diámetro, y su proyección sobre el mismo diámetro.*

540.—*Dos secantes* A B *y* A C (fig. 218) *tiradas desde un mismo punto, son recíprocamente proporcionales á sus partes externas* A D *y* A E.

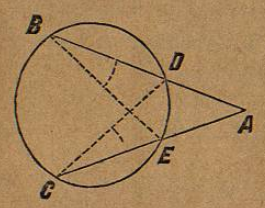

Figura 218.

Esto es, debiendo formar una secante y su parte externa los extremos de una proporción, y la otra secante y su parte externa los medios, debe demostrarse que

A B : A C :: A E : A D

para esto tiremos las cuerdas B E y D C, y resultarán formados los triángulos A B E y A C D, que serán semejantes (515) por tener el ángulo en A común y B=C por tener la misma medida, $\frac{ED}{2}$; buscando y comparando los lados homólogos de estos triángulos, llegarémos á la proporción

A B : A C :: A E : A D

541.—*Si desde un mismo punto* A (fig. 219) *se tiran una tangente y una secante á un círculo, la tangente* A B *será media proporcional entre toda la secante y su parte externa.*

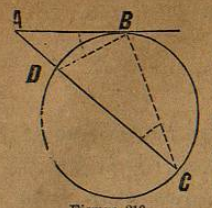

Figura 219.

Tirando las cuerdas B D y B C, resultarán los triángulos A B C y A B D, que serán semejantes (515) por tener el ángulo A común y C=A B D, supuesto que están medidos ambos por la mitad del mismo arco B D. Buscando y comparando los lados homólogos, obtendrémos esta proporción:

A C : A B :: A B : A D

que es lo que se tenía que demostrar.

542.—*Si en un punto* B (fig. 220) *de la circunferencia se tira una tangente igual al diámetro, y por el extremo* A *se traza una secante que pase por el centro del círculo, la secante quedará dividida en media y extrema razón.*

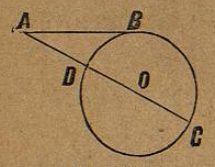

Figura 220.

Se dice que una recta A C queda dividida en media y extrema razón, cuando la parte mayor D C es media proporcional entre toda la recta A C y su parte menor A D.

Conforme á la hipótesis del teorema, tenemos A B igual á D C, y según el teorema anterior

A C : A B :: A B : A D

sustituyendo

A C : C D :: C D : A D

que es lo que se debía demostrar.

543.—*Los perímetros de dos polígonos regulares del mismo número de lados tanto inscritos como circunscritos en círculos diferentes, son proporcionales á los radios de los círculos.*

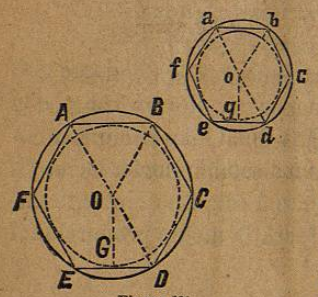

Figura 221.

(Fig. 221). Sean A B C D.... y a b c d .... los polígonos que considerarémos primero inscritos en los círculos.

Por ser polígonos semejantes (519) tendrémos (523).

A B C D.... : a b c d.... :: A B : a b

Tirando los radios A O y O B, o a y o b resultarán los triángulos O A B y o a b que serán semejantes por ser equiángulos, luego

A B : a b :: O A : o a