una proporción nos dará el número de grados del arco

$$\overset{m}{124}'247790 : \overset{m}{52} :: 360^\circ : x = 150^\circ - 40'$$

con poca diferencia.

V.—*Determinar la magnitud de un arco de 60° en partes del radio.*

En este caso se supone el radio=1. La circunferencia será

$$C = 2\,\pi\,r$$

sustituyendo $C = 2 \times 3'141593 \times 1 = \overset{m}{6}'283186$

estableciendo la proporción:

$$360^\circ : 60^\circ :: 6'283186 : x = 1'047198$$

Esto es, siendo 1 el radio, la longitud del arco de 60° será 1'047198 millonésimas.

BIBLIOTECA ... NUEVO LEON

SEGUNDA PARTE.

SUPERFICIES.

PRELIMINARES.

551.—*Superficie es la extensión en longitud y latitud.*

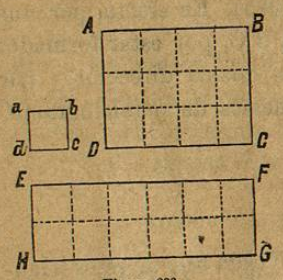

Figura 230.

La superficie de una figura es la extensión comprendida entre las líneas que la limitan. Del mismo modo que la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud á la de otra línea escogida por unidad y determinando cuántas veces la contiene, para valuar una superficie es necesario determinar cuántas veces contiene la unidad de superficie. Al tratar del sistema de pesos y medidas (182 y 185) hemos visto que la unidad superficial es un cuadrado, y si representando esta unidad por a b c d (fig. 230) quisiéramos estimar la área ó superficie del rectángulo A B C D, bastaría averiguar cuántas veces el cuadrado está contenido en el rectángulo. En la figura que hemos tomado por ejemplo, diríamos que la área del rectángulo es de 12 medios centímetros cuadrados, porque 12 veces cabe la unidad superficial escogida, que es el medio centímetro cuadrado, en dicho rectángulo.

Se llaman figuras equivalentes las que tienen superficies iguales, y como se ha visto, figuras iguales son aquellas que sobreponiéndolas coinciden en todos sus puntos. Los rectángulos A B C D y E F G H son

resta i B, la que forzosamente será menor que una de las divisiones. Tirando por los puntos de división paralelas, quedarán divididos el rectángulo A' C' en dos rectángulos, y el rectángulo A C en cuatro rectángulos iguales entre sí, más otro i C menor que los demás.

Considerando las porciones conmensurables, tendrémos conforme á lo que acabamos de demostrar:

rectángulo A' C' : rectángulo A o :: A' B' : A i

Como rect. A o=rect. A C—rect. i C, y A i=A B—B i sustituyendo se tiene:

rect. A' C' : rect. A C—rect. i C :: A' B' : A B—B i

multiplicando entre sí los medios y los extremos

A B×rect. A' C'—B i×rect. A' C'=A' B'×rect. A C—

—A' B'×rect. i C

trasladando:

A B×rect. A' C'—A' B'×rect. A C=

=B i×rect. A' C'—A' B'×rect. i C

Una vez establecida esta ecuación, vamos á demostrar que A B× rectángulo A' C' no puede ser desigual á A' B' ×rectángulo A C. Si lo fueran, habría entre estos dos productos, cuyos factores todos son constantes, una diferencia d fija é independiente de la magnitud arbitraria de las partes en que se divida A' B' y se tendría:

A B×rect. A' C'— A' B'×rect. A C=d.

y por lo mismo

B i×rect. A' C'—A' B'×rect. i C=d.

En esta ecuación hay que notar: 1° que la resta *d* es constante, porque indica la diferencia que, conforme á la ecuación penúltima, hemos supuesto que pudiera existir entre los productos A B×rect. A' C' y A' B'×rect. A C cuyos factores, como se ve en la figura, son cantidades fijas, y 2° que el valor del minuendo B i×rect. A' C' es variable, á causa de que al aumentar el número de subdivisiones de A' B' el valor de B i disminuye.

En efecto, dividiendo A' B' en 2 partes y llevando la magnitud de estas partes sobre A B resulta B i$<\frac{A'B'}{2}$. Si hubiéramos dividido A' B' en 20 partes, llevando la magnitud de estas partes sobre A B resultaría

B i$<\frac{A'B'}{20}$ y si hubiéramos dividido A' B' en 2000 partes resultaría B i$<\frac{A'B'}{2000}$. Ahora bien, pudiendo ser B i una fracción tan pequeña como se quiera, y disminuyendo el valor del producto B i×rect. A' C' en proporción del factor B i se comprende que podría llegar á ser menor que la cantidad constante *d*; pero como es inadmisible que el minuendo pueda ser menor que la resta, no podemos aceptar que sean desiguales los productos A B×rect. A' C' y A' B'×rect. A C, y siendo iguales, se tendrá la proporción

rect. A' C' : rect. A C :: A' B' : A B

que es lo que se debía demostrar.

558.—Como en un rectángulo puede tomarse la altura como base y ésta por altura, se infiere que *las áreas de los rectángulos que tienen sus alturas iguales, son proporcionales á sus bases.*

559.—*Dos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

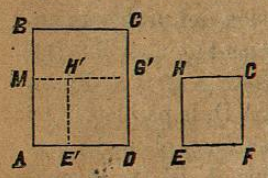

Figura 236.

Sean A B C D y E F G H (fig. 236) dos rectángulos cualesquiera. Si suponemos sobrepuesto el rectángulo E G de manera que coincida el ángulo recto F con el D, tomará la posición E' D G' H'. Si prolongamos el lado G' H' hasta M, se formará el paralelógramo A D G' M de la misma base que A C y de igual altura que D H'. Como el rectángulo D M y el A C tienen la misma base A D, serán proporcionales á sus alturas, y por tanto

rect. A C : rect. D M :: A B : D G'....(m)

Los rectángulos D M y D H' tienen la misma altura D G', luego serán proporcionales á sus bases, como lo expresa la siguiente proporción:

rect. D M : rect. D H' :: A D : D E'.....(n)

para eliminar el rectángulo auxiliar D M multiplicarémos ordenadamente las proporciones (m) y (n), y suprimiendo los factores comunes, resulta:

rect. A C : rect. D H' :: A D×A B : D E'×D G'

sustituyendo

rect. A C : rect. F H :: A D×A B : F E×F G

que es lo que se tenía que demostrar.

560.—Problemas de figuras equivalentes.—I.—*Transformar el polígono* A B C D E (fig. 237) *en otro equivalente que tenga un lado ménos.*

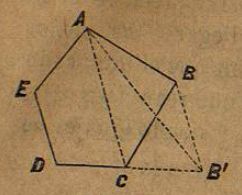

Figura 237.

Construcción.—Tírese la diagonal A C: por el vértice B del triángulo A B C que tiene esta diagonal por base, tírese B B' paralela á A C; si después prolongamos el lado D C hasta su intersección en B', con la paralela B B' y trazamos la recta A B', se tendrá el polígono A B' D E de un lado menos y equivalente á A B C D E.

Demostración.—Tomando A C como base de los triángulos A C B y A C B' por estar los vértices opuestos B y B' sobre la misma paralela, tendrán sus alturas iguales; luego (556) los triángulos A C B y A C B' serán equivalentes. Si á cada uno de ellos se agrega el área de la figura A C D E, resultará A B C D E equivalente á A B' D E.

II.—*Transformar un polígono* A B C D E (fig. 238) *en un triángulo equivalente.*

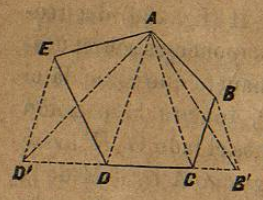

Figura 238.

Ejecutando la construcción del problema anterior, transformarémos el pentágono A B C D E en el cuadrilátero equivalente A B' D E. En seguida, tirando la diagonal A D, la paralela E D' y la recta A D', transformarémos el cuadrilátero A B' D E en el triángulo A B' D', el cual resolverá el problema, supuesto que es equivalente al cuadrilátero y éste al pentágono. Del mismo modo podrá reducirse á triángulo un polígono de mayor número de lados.

III.—*Transformar un polígono* A B C D (fig. 239) *en otro equivalente que tenga un lado más.*

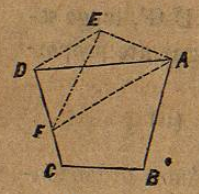

Figura 239.

Construcción.—Desde el vértice A, tírese una recta indefinida A E que quede fuera del polígono y otra A F que toque el lado opuesto D C en un punto cualquiera F: por el vértice D del triángulo A F D tírese D E paralela á A F, y reuniendo los puntos E y F se tendrá el polígono A B C F E pedido.

Demostración.—Los triángulos A F D y A F E tienen la misma base A F, y estando los vértices opuestos D y E sobre una paralela, tendrán alturas iguales, y por lo mismo serán equivalentes (556). Si á cada uno de los triángulos equivalentes A F D y A F E se agrega la parte común A F C B resultará que el polígono A B C D es equivalente á A B C F E que tiene un lado más.

VALUACION DE LAS SUPERFICIES.

561.—Hemos dicho que para medir ó valuar la área de una figura, es necesario determinar el número de veces que contiene la área de otra figura escogida como término de comparación, y que la unidad de superficie es un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal.

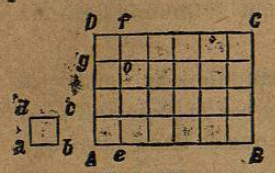

Figura 240.

Así, por ejemplo, si queremos medir la área del rectángulo A B C D (fig. 240), la compararémos á la del cuadrado a b c d, tomado como unidad, y determinarémos cuántas veces la unidad lineal a b, lado del cuadrado, está contenida en la base A B del rectángulo (6 veces en el caso que consideramos). Si por los puntos de división tiramos rectas perpendiculares á la base, resultarán 6 bandas ó rectángulos cuya base es la unidad y cuya altura es la del rectángulo A B C D. En seguida llevarémos la unidad lineal a d, lado del cuadrado, cuantas veces se pueda sobre la altura A D del rectángulo (4 en nuestro ejemplo), y tirando por los puntos de división paralelas á la base, resultará el rectángulo A B C D dividido en 6 bandas, cada una de las cuales contiene 4 cuadrados, ó en junto $6 \times 4 = 24$ unidades superficiales. Se vé, pues, que para valuar la área del rectángulo, se ha determinado el número de unidades lineales de que constan su base y su altura, y el producto de estos dos números expresa cuántas veces la unidad superficial a b c d está contenida en el repetido rectángulo.

Como puede suceder que la unidad lineal no esté contenida un número cabal de veces en la base y en la altura del rectángulo, valuarémos su área, fundándonos (559) en que dos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas. Así, en la misma figura 240, se tiene:

$$ABCD : abcd :: AB \times AD : ab \times ad$$

y como a b c d es la unidad superficial, y sus dos lados son iguales entre sí é iguales á la unidad, sustituyendo resulta:

$$ABCD : 1 :: AB \times AD : 1 \times 1$$

luego despejando, resulta la área de

equivalentes porque tienen la misma superficie; pero como se ve, no son iguales. No siendo posible en cualquiera figura sobreponer la unidad para valuar su superficie, es preciso para conseguirlo valerse de medios indirectos.

552.—Para determinar las áreas es de un uso frecuente escoger en los triángulos, y en los paralelógramos uno de sus lados como *base* de la figura, y se llama altura la perpendicular bajada sobre este lado del vértice ó del lado opuesto.

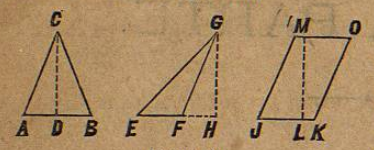

Figura 231.

Así (fig. 231) tomando A B por *base, la altura* del triángulo es C D. En el triángulo E F G, considerando E F como base, la altura es G H, la cual, como se ve, cae sobre la prolongación de la base. Por último, en el paralelógramo J O, la base es J K y la altura M L, la cual puede bajarse desde cualquier punto del lado opuesto á la base.

553.—*Un paralelógramo* A B C D (fig. 232) *y un rectángulo* A B E F *que tienen la misma base* A B *é igual altura, son equivalentes.*

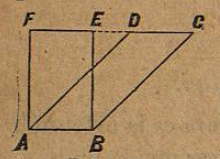

Figura 232.

Siendo la altura del paralelógramo igual á la perpendicular E B, si prolongamos F E pasará por D C, y ejecutándolo resultarán dos triángulos A F D y B E C que serán iguales, (385). En efecto, por una parte el ángulo F A D=E B C, por estar formados por lados paralelos, y tener sus vértices en la misma dirección y por otra, F A=E B y A D=B C por lados opuestos de paralelógramo. Una vez demostrado que el triángulo

A F D=B E C

si sucesivamente restamos del trapecio A B C F cada uno de estos triángulos tendrémos:

A B C F—A F D=A B C F—B E C

luego A B C D=A B E F en superficie, que es lo que se quería demostrar.

554.—*Dos paralelógramos de igual base é igual altura son equivalentes,* por ser cada uno de ellos equivalente á un rectángulo de la misma base y altura.

555.—*Un triángulo cualquiera* A B C (fig. 233) *es equivalente á la mitad de un paralelógramo de la misma base y altura.*

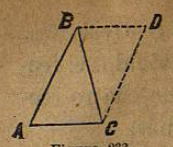

Figura 233.

Considerando A C como la base del triángulo, por el vértice B del ángulo opuesto tírese B D paralela á A C, y por C una paralela C D á A B, resultará el paralelógramo A B D C de la misma base y altura que el triángulo; pero como los triángulos A B C y B C D son iguales (386), por tener B C común, B D=A C y A B=C D por lados opuestos de paralelógramo, se infiere que el triángulo A B C será la mitad del paralelógramo que tiene la misma base y altura que él.

556.—*Dos triángulos que tienen sus bases y alturas respectivamente iguales, son equivalentes;* porque cada uno de los triángulos es la mitad de paralelógramos equivalentes entre sí.

557.—*Dos rectángulos de la misma base son proporcionales á sus alturas.*

Puede suceder que las alturas sean *conmensurables* ó *inconmensurables* entre sí.

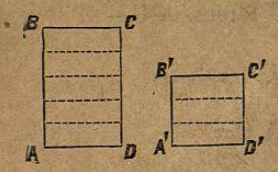

Figura 234.

1º Si (fig. 234) se tienen los rectángulos A B C D y A' B' C' D' de bases iguales, A D =A' D' y cuyas alturas A B y A' B' sean *conmensurables*, de modo que, por ejemplo, dividiendo A' B' en tres partes iguales, cada una de éstas puede llevarse sobre A B cinco veces, en este supuesto resultará

A' B' : A B :: 3 : 5

Si por los puntos de división tiramos paralelas respectivamente á las bases A' D' y á A D quedará dividido el rectángulo A' C' en tres rectángulos, y el rectángulo A C en cinco rectángulos iguales todos entre sí por tener la misma base y altura, luego

rectángulo A' C' : rectángulo A C :: 3 : 5

suprimiendo la razón común de estas dos proporciones, se tiene por último:

rectángulo A' C' : rectángulo A C :: A' B' : A B

que es lo que se tenía que demostrar.

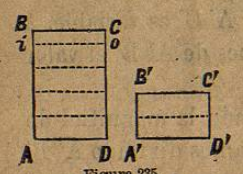

Figura 235.

2º Si las alturas A B y A' B' son *inconmensurables* (fig. 235) el teorema será igualmente cierto. Supongamos que después de haber dividido A' B' en dos partes iguales, al llevar la magnitud de estas partes sobre A B resulte esta altura dividida en cuatro partes de A á i, quedando una