COMPARACION DE LAS AREAS.

574.—*Las áreas de dos paralelógramos cualesquiera, son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura, si representamos por P y p las áreas de los paralelógramos, por B y b sus bases y por A y a las alturas, se tiene:

$$P = B \times A$$
$$p = b \times a$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, resulta:

$$\frac{P}{p} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

que es lo que se debía demostrar.

575.—*Las áreas de dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Como la área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, si llamamos T y t las áreas de los triángulos B y b sus bases, y A y a sus alturas, se tiene:

$$T = \frac{B \times A}{2}$$
$$t = \frac{b \times a}{2}$$

Dividiendo una por otra estas ecuaciones, y suprimiendo el denominador común 2, resulta:

$$\frac{T}{t} = \frac{B \times A}{b \times a}$$

ó

$$T : t :: B \times A : b \times a$$

que es lo que expresa el teorema.

De aquí se infiere: 1° *que las áreas de los triángulos que tienen bases*

iguales serán proporcionales á sus alturas; *y* 2°, *que las áreas de los triángulos que tienen alturas iguales son proporcionales á sus bases;* pues para demostrarlo basta suprimir el factor igual en la segunda razón de la anterior proporción.

576.—*Las áreas de dos triángulos* A B C *y* D E F (fig. 249) *que tienen un ángulo igual, son proporcionales á los productos respectivos de los lados que forman el ángulo igual.*

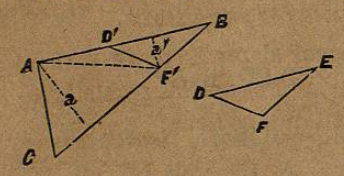

Figura 249.

Si el ángulo B=E sobreponiendo los triángulos, el lado E D tomaría la posición B D' y el lado E F la de B F' y reuniendo D' y F' se tendría el triángulo B D' F' igual á E D F, por tener un ángulo igual formado por dos lados respectivamente iguales. Ahora bien, tirando la recta A F' resultará el triángulo A F' B en el que tomando B F' como base, tendrá la misma altura a que A B C; y si se toma B A como base tendrá la misma altura a' que B D' F'. Supuesto que estos triángulos tienen la misma altura serán proporcionales á sus bases [575—2°] y tendrémos:

$$A\,B\,C : A\,F'\,B :: B\,C : B\,F'$$

y

$$A\,F'\,B : B\,D'\,F' :: A\,B : B\,D'$$

multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo el factor A F' B común á los dos términos de la primera razón, resulta:

$$A\,B\,C : B\,D'\,F' :: B\,C \times A\,B : B\,F' \times B\,D'$$

y sustituyendo sus iguales

$$A\,B\,C : E\,D\,F :: B\,C \times A\,B : E\,F \times E\,D$$

que es lo que se quería demostrar.

577.—*Las áreas de los triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

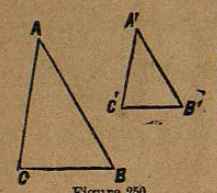

Figura 250.

Sean los triángulos A B C y A' B' C' [fig. 250] por ser semejantes tendrán sus ángulos iguales y sus sus lados homólogos proporcionales. Por ser el ángulo A=A' se tiene (576).

$$A\,B\,C : A'\,B'\,C' :: A\,C \times A\,B : A'\,C' \times A'\,B'$$

por lados homólogos A C : A' C' :: A B : A' B' multiplicando estas

Formando una proporción con estas ecuaciones, se tiene:

$$S : s :: \pi R^2 : \pi r^2$$

suprimiendo el factor común π de la segunda razón, resulta:

$$S : s :: R^2 : r^2 \ldots (1)$$

Si en esta proporción sustituímos por R y r sus valores en función del diámetro que expresarémos, por D y d, se tiene:

$$S : s :: \frac{D^2}{4} : \frac{d^2}{4}$$

multiplicando por 4 la segunda razón, resulta:

$$S : s :: D^2 : d^2 \ldots (2)$$

quedando demostrado el teorema por medio de las proporciones (1) y (2).

581.—*Las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios, ó al cuadrado de sus arcos.*

Se dice que dos sectores son semejantes, cuando los arcos que los forman tienen el mismo número de grados.

Si representamos por S y s las áreas de los sectores, por A y a los arcos, y por R y r los radios, tendrémos (570):

$$S=\frac{A R}{2}$$

$$s=\frac{a r}{2}$$

de donde $$S : s :: \frac{A R}{2} : \frac{a r}{2} \ldots (1)$$

Como los arcos de igual número de grados son proporcionales á los radios, se tiene:

$$A : a :: R : r \ldots (2)$$

multiplicando estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$S : s :: R^2 : r^2$$

que es lo que expresa la primera parte del teorema. Para demostrar la segunda establecerémos la proporción

$$R : r :: A : a \ldots (3)$$

multiplicando ordenadamente los términos de esta proporción por los de la (1) y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$S : s :: A^2 : a^2$$

que es lo que se debía demostrar.

582.—Es de mucho interés fijar la atención en la correspondencia íntima que existe siempre entre las relaciones geométricas de una figura y las relaciones numéricas de sus líneas ó de sus áreas, que no vienen á ser sino la traducción de las mismas propiedades en otro lenguaje. Así, pues, valiéndonos de esta correspondencia, hemos demostrado en muchos casos por medio del álgebra, teoremas de geometría, y otras veces por medio de la geometría podrán establecerse ó demostrarse fórmulas algebráicas.

Por vía de ejemplo, demostrarémos geométricamente una fórmula establecida en álgebra, y un teorema deducido de las propiedades de las líneas proporcionales.

583.—*Dadas las líneas* a *y* b (fig. 253), *determinar la relación que existe entre estas rectas y el cuadrado de su suma.*

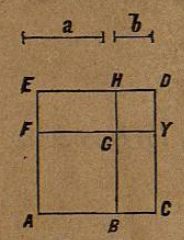

Figura 253.

Tómese A B=a; en su prolongación colóquese B C =b, y construirémos luego el cuadrado A C D E sobre el lado A C=a+b; tomando A F=a, y tirando por los puntos B y F las rectas B H y F Y paralelas, á los lados del cuadrado, se tendrá:

$$\text{sup. } A\,C\,D\,E = \text{sup. } (A\,G + C\,G + E\,G + G\,D)$$

El rectángulo C G, como fácilmente puede demostrarse, es igual á E G; así es que, sustituyendo:

$$A\,C\,D\,E = A\,G + 2\,C\,G + GD$$

y reemplazando estos valores geométricos por sus expresiones algebráicas, resulta:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

cuya fórmula hemos demostrado en aritmética al tratar de las partidas del cuadrado de un número compuesto de decenas y unidades, y en álgebra al ocuparnos de la multiplicación de los polinomios.

584.—*El cuadrado* C H (fig. 254) *formado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados* A D *y* A G *formados sobre los catetos.*

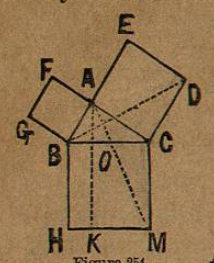

Figura 254.

Desde el vértice A del ángulo recto, bájese la perpendicular A O, prolónguese hasta K y tírense las rectas B D y A M.

El triángulo B C D es igual á A M C por tener el ángulo B C D=A C M formado por lados respectivamente iguales, B C=C M y C D=A C por lados de cuadrados. El ángulo B C D es igual á A C M porque cada uno de ellos está formado de un ángulo recto, más la parte común A C B. Así, pues, se tiene:

triángulo B D C=A M C.... (1)

El triángulo B D C tiene la misma base D C que el cuadrado A D, é igual altura, por estar comprendidos entre las paralelas C D y B E, luego

$$\text{sup. triángulo B D C}=\frac{\text{cuad. A D}}{2}\ldots. (2)$$

El triángulo A M C tiene la misma base C M que el rectángulo O C M K, é igual altura, por estar comprendidos entre las paralelas C M y A K, luego

$$\text{sup. triángulo A M C}=\frac{\text{rect. C K}}{2}\ldots. (3)$$

Siendo los primeros miembros de las ecuaciones (2) y (3) iguales entre sí (1) resulta que

$$\frac{\text{cuad. A D}}{2}=\frac{\text{rect. C K}}{2}$$

ó

cuad. A D=rect. C K.... (4)

de una manera análoga puede demostrarse que

cuad. A G=rect. B K.... (5)

sumando las ecuaciones (4) y (5), tenemos por último:

cuad. A D+cuad. A G=cuad. C H

que es lo que expresa el teorema, y lo mismo que habíamos demostrado en el núm. 531, de otro modo.

585.—Observación.—Esta propiedad nos sirve para formar un cuadrado equivalente á la suma ó á la diferencia de dos cuadrados conocidos; pues si se construye un triángulo rectángulo A B C (fig. 254) en el que los catetos A B y A C sean los lados de los cuadrados conocidos, el cuadrado formado sobre la hipotenusa será equivalente á la suma de los cuadrados A G y A D; y el cuadrado construído sobre uno de los catetos será equivalente á la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el del otro cateto.

586.—Si observamos en la figura 254 que el cuadrado B C M H y los rectángulos B K y C K tienen la misma base B H=O K, sus áreas serán proporcionales á sus alturas B C, B O y O C; esto es,

B M : B K : C K :: B C : B O : O C

sustituyendo por B K su equivalente A G, y por C K el suyo A D, se tiene que

B M : A G : A D :: B C : B O : O C

esto es, que *la relación entre el cuadrado formado sobre la hipotenusa y los cuadrados construídos sobre los catetos, es la misma que la que hay entre la hipotenusa y los segmentos* B O *y* O C.

587.—*La área de un polígono, construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente á la suma de las áreas de los polígonos semejantes al primero, construídos sobre los catetos del mismo triángulo.*

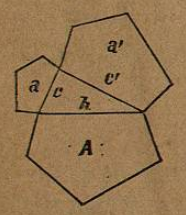

Figura 255.

Si en la figura 255 llamamos A la área del polígono construído sobre la hipotenusa, a la del construído sobre el cateto c, y a' la del construído sobre el cateto c', tendrémos que por ser los polígonos semejantes, sus áreas serán proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos (579). Esto es:

$$a : c^2 :: a' : c'^2 :: A : h^2$$

Fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, se tiene:

$$a+a' : c^2+c'^2 :: A : h^2$$

pero como (584) $h^2=c^2+c'^2$

siendo iguales los consecuentes, lo serán los antecedentes,

luego $$A=a+a'$$

que es lo que se debía demostrar.

588.—*La área de un círculo construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo como diámetro, es equivalente á la suma de los círculos construídos sobre los catetos como diámetros.*

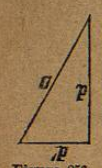

Figura 256.

Siendo el círculo un polígono regular de una infinidad de lados infinitamente pequeños, este teorema es un corolario del anterior; pero lo demostrarémos fundándonos en la expresión de la área del círculo en función del diámetro (568). Sea (fig. 256) D la hipotenusa, diámetro del círculo construído sobre ella y S su área, d uno de los catetos, diámetro del círculo cuya área representarémos por s; y d' el otro cateto diámetro del círculo cuya área es s'. En tal virtud,

$$S=\frac{\pi D^2}{4} \qquad s=\frac{\pi d^2}{4} \qquad s'=\frac{\pi d'^2}{4}$$

y fundándonos en que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos, se tiene:

$$D^2=d^2+d'^2$$

multiplicando por $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\pi D^2}{4}=\frac{\pi d^2}{4}+\frac{\pi d'^2}{4}$$

y sustituyendo $$S=s+s'$$

que es lo que se quería demostrar.

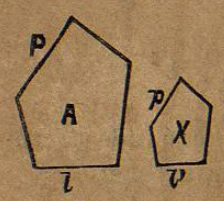

Figura 257.

589.—Problemas de comparación de áreas, —I.—*Dada la área* A *de un polígono* P (fig. 257) *y uno de sus lados* l, *determinar la área de un segundo polígono* p *semejante al primero, y en el cual se conoce el lado homólogo* l'.

Como las áreas de las figuras semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, se tiene:

$$A : x :: l^2 : l'^2$$

de donde $$x=\frac{A\,l'^2}{l^2}$$

II.—*Dados dos polígonos semejantes* (fig. 257), *construír otro semejante á ellos y equivalente á su suma.*

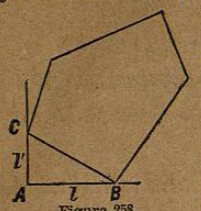

Figura 258.

Para resolver este problema, lo esencial es determinar la magnitud del lado del polígono buscado, homólogo á uno de los lados de los polígonos propuestos.

Constrúyase el ángulo recto A (fig. 258) y llévense sobre sus lados longitudes respectivamente iguales á los lados homólogos l y l' de los polígonos conocidos; tírese la hipotenusa B C, y si sobre ella se construye un polígono semejante á uno de los dados, quedará resuelto el problema (587).

III.—*Dados dos círculos* A *y* B (fig. 259) *construir otro equivalente á su diferencia.*

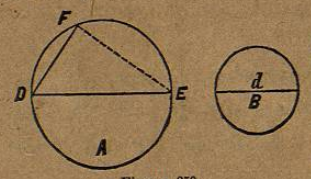

Figura 259.

Tírese el diámetro D E, desde su extremo D llévese la cuerda D F igual al diámetro d del círculo menor B, y tirando la cuerda F E ésta será el diámetro del círculo pedido.

Demostración.—Por ser rectángulo el triángulo D F E, se tendrá:

$$E\,F^2=D\,E^2-D\,F^2$$

Si representamos por R el radio del círculo A, por r el del círculo B, y por r' el del círculo buscado, cuyo diámetro vamos á demostrar que debe ser F E; sustituyendo en la anterior ecuación, se tiene:

$$4\,r'^2=4\,R^2-4\,r^2$$

dividiendo todos los términos por 4, y multiplicando por π, nos da:

$$\pi\,r'^2=\pi\,R^2-\pi\,r^2$$

que es lo que debíamos demostrar.

IV.—*Construir un polígono semejante á otro* p (fig. 260), *y cuya área esté con la del primero en la relación de* m *á* n.

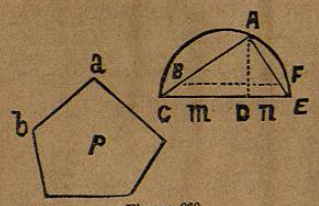

Figura 260.

Sea a b uno de los lados del polígono dado, y vamos á determinar el lado homólogo del polígono cuya área ha de estar con la de éste en la razón de m : n.

Sobre una recta indefinida llévense dos rectas, C D y D E, cuyas magnitudes estén en la relación de m : n. Sobre C E co-

mo diámetro, trácese una semicircunferencia; levántese en D la perpendicular D A, y tirando las cuerdas A C y A E, llévese sobre la primera de A á B el lado a b, por B trácese B F paralela á C E, y la recta A F será el lado homólogo á a b del polígono buscado.

Demostración.—Por ser semejantes los triángulos A C E y A B F, se tiene:

$$AC : AE :: AB : AF$$

$$AC^2 : AE^2 :: AB^2 : AF^2$$

como $AC^2 = m.\ CE$ y $AE^2 = n.\ CE$ (530—3°)

sustituyendo estos valores en la proporción anterior y simplificando

tendrémos: $m : n :: AB^2 : AF^2$

ó sustituyendo $m : n :: ab^2 : AF^2$

y como las áreas de los polígonos son proporcionales á los cuadrados de los lados, se infiere que la área del polígono construido sobre la recta A F, es á la área del polígono p como m es á n; que es lo pedido en el problema.

TERCERA PARTE.

VOLUMENES.

Planos y rectas.

590.—Hasta aquí nos hemos ocupado del estudio de las propiedades de las figuras que pueden estar contenidas en un plano, considerando las relaciones que existen entre las partes que las forman, con el fin de deducir de los elementos conocidos los desconocidos. Esta parte de la geometría elemental se denomina por esta razón *geometría plana*. Vamos ahora á tratar de las figuras considerándolas en el espacio y de los cuerpos con sus tres dimensiones, cuyo estudio constituye lo que comunmente se llama *geometría en el espacio*.

Nos ocuparémos primero de las relaciones de las líneas rectas con los planos; en seguida de las á que dan lugar los planos entre sí, y por último, de los cuerpos formados de planos ú originados por el círculo, valuando sus áreas y sus volúmenes.

591.—*Plano es una superficie tal que si se toman dos puntos cualesquiera sobre esta superficie y se les reune por una recta, esta línea tendrá todos sus puntos en la superficie.*

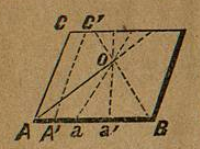

Figura 261.

Todo plano debe considerarse como una superficie indefinida en longitud y latitud, á menos que no se fijen los puntos que lo limitan. Puede concebirse el plano engendrado por el movimiento de una recta o A (fig. 261) que al girar al rededor del punto o, al-

proporciones ordenadamente y suprimiendo los factores iguales, resulta

$$A\,B\,C : A'\,B'\,C' :: A\,B^2 : A'\,B'^2 \ldots [1]$$

Como los triángulos son semejantes, se tiene:

$$A\,B : A'\,B' :: A\,C : A'\,C' :: B\,C : B'\,C'$$

elevando al cuadrado

$$A\,B^2 : A'\,B'^2 :: A\,C^2 : A'\,C'^2 :: B\,C^2 : B'\,C'^2$$

comparando esta serie de razones con la proporción (1) resulta:
$A\,B\,C : A'\,B'\,C' :: A\,B^2 : A'\,B'^2 :: A\,C^2 : A'\,C'^2 :: B\,C^2 : B'\,C'^2$
que es lo que se debía demostrar.

578.—*Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus bases ó de sus alturas.*

En el hecho de ser los triángulos semejantes, conforme al teorema del número anterior, sus áreas serán proporcionales al cuadrado de los *lados* que se tomen por base.

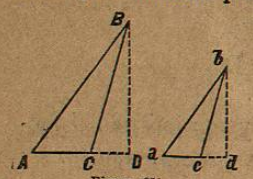

Figura 251.

Para demostrar que lo son al cuadrado de sus alturas, en los triángulos semejantes A B C, a b c (fig. 251) tomemos A C y a c por bases, tiremos las alturas B D y b d, y resultarán los triángulos B C D y b c d, que serán semejantes por ser rectángulos, y tener el ángulo B C D= b c d por ser suplementos respectivamente del ángulo B C A= b c a como ángulos de los triángulos semejantes.

Comparando los lados homólogos de los triángulos B C D y b c d,

se tiene $\quad B\,C : b\,c :: B\,D : b\,d$
elevando al cuadrado $\quad B\,C^2 : b\,c^2 :: B\,D^2 : b\,d^2$

Por otra parte, las áreas de los triángulos, por ser semejantes, estarán en la relación de

$$A\,B\,C : a\,b\,c :: B\,C^2 : b\,c^2$$

luego $\quad A\,B\,C : a\,b\,c :: B\,D^2 : b\,d^2$

que es lo que se debía demostrar.

579.—*Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus lados ó de sus líneas homólogas.*

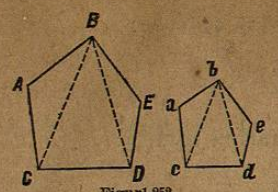

Figura 252.

Sean A B E D C y a b e d c (fig. 252) dos polígonos semejantes; si desde los vértices B y b se tiran diagonales, quedarán divididos en triángulos que serán respectivamente semejantes (520) y se tendrá:

$$A\,B\,C : a\,b\,c :: A\,C^2 : a\,c^2 \ldots (1)$$
$$B\,C\,D : b\,c\,d :: C\,D^2 : c\,d^2$$
$$B\,D\,E : b\,d\,e :: D\,E^2 : d\,e^2$$

Siendo semejantes los polígonos, sus lados y líneas homólogas serán proporcionales, y tendrémos:

$$A\,C : a\,c :: C\,D : c\,d :: D\,E : d\,e$$

elevando al cuadrado esta serie de razones

$$A\,C^2 : a\,c^2 :: C\,D^2 : c\,d^2 :: D\,E^2 : d\,e^2$$

por ser iguales las segundas razones de las tres primeras proporciones, se tiene:

$$A\,B\,C : a\,b\,c :: B\,C\,D : b\,c\,d :: B\,D\,E : b\,d\,e$$

Fundándonos en que la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente, tendrémos:

$$A\,B\,E\,D\,C : a\,b\,e\,d\,c :: A\,B\,C : a\,b\,c \ldots (2)$$

Suprimiendo la razón común entre las proporciones (1) y (2), resulta:

$$A\,B\,E\,D\,C : a\,b\,e\,d\,c :: A\,C^2 : a\,c^2$$

Esta proporción demuestra la primera parte del teorema, y como en vez de la razón $A\,C^2 : a\,c^2$ por la semejanza de los triángulos, puede ponerse la de otras líneas homólogas elevadas al cuadrado, quedará demostrado el teorema en todas sus partes.

580.—*Las áreas de los círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Hemos visto que la área de un círculo (568) está expresada por la fórmula:

$$S = \pi\,R^2$$

la de otro círculo sería $\quad s = \pi\,r^2$