ANGULOS DIEDROS.

614.—*Se llama ángulo diedro la figura formada por dos planos M y N inclinados entre sí, que concurren en una recta A B* (fig. 279). Los planos M y N se denominan *caras* ó *lados*, y la recta A B *arista* del diedro. La magnitud de un ángulo diedro depende de la mayor ó menor inclinación de los planos que lo forman, y no de la extensión de éstos; por lo que al medir un diedro lo que se estima únicamente es la inclinación de sus caras.

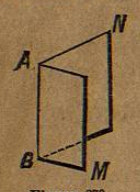

Figura 279.

Se tendrá una idea exacta del ángulo diedro y de su magnitud, imaginándose que sus caras están primero aplicadas una sobre otra, que en seguida se separan, pero girando al rededor de la arista A B, como las dos partes de un libro que se abre. El ángulo diedro, nulo al principio, toma un valor que va aumentando con la separación de las caras. Así, pues, el ángulo diedro está engendrado por la rotación de un plano al rededor de una recta. En este movimiento cada uno de los puntos del plano describe una circunferencia de círculo cuyo plano es perpendicular á la arista y cuyo centro está en un punto de esta recta.

Cuando no hay más que un solo diedro, se le designa por las letras A B de su arista; pero cuando hay varios que concurren en la misma arista, para evitar confusión, se designa el diedro por cuatro letras; teniendo cuidado de poner siempre las dos de su arista A B en medio de las otras dos N y M que corresponden á los planos que lo forman, y así se dice el diedro N A B M.

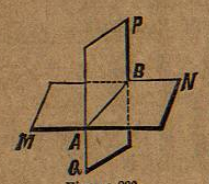

Figura 280.

Cuando un plano P A (fig. 280) cae sobre otro M N, forma con éste dos ángulos diedros M A B P y P B A N, que son *adyacentes*. Cuando éstos son iguales, el plano P A es perpendicular á M N, y recíprocamente. Si el ángulo que forman los dos planos es menor que P B A N, se dice que el diedro es *agudo*, y en caso contrario, que es *obtuso*. En fin, para los ángulos diedros se adoptan las mismas denominaciones de ángulos *complementarios, suplementarios*, etc., que para los ángulos rectilíneos.

615.—*Los ángulos rectilíneos* B A C *y* b a c (fig. 281) *que resultan*

de la intersección de un ángulo diedro A a, *con dos planos paralelos cualesquiera, son iguales.*

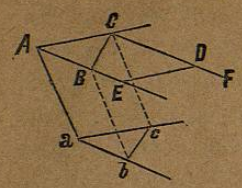

Figura 281.

Tomemos A C = a c y B A = b a, y tiremos las rectas B b, C c, B C y b c: A C es paralela á a c (604) é igual, luego la figura A c es paralelógramo y en consecuencia será C c igual y paralela á A a. Como A B es igual y paralela á a b, la figura A b es igualmente un paralelógramo, de lo que resulta que B b es igual y paralela á A a; luego B b será igual y paralela á C c, y B c será un paralelógramo en el que B C=b c. Los dos triángulos A B C y a b c serán iguales (386) por tener sus tres lados respectivamente iguales, y de la igualdad de los triángulos resulta que el ángulo B A C=b a c, que es lo que se quería demostrar.

616.—De aquí se infiere: 1° *si dos ángulos en el espacio* B A C *y* b a c (fig. 281) *tienen sus lados paralelos y sus aberturas están vueltas en el mismo sentido, serán iguales;* 2° *igualmente lo son si están vueltas en sentido contrario como* b a c *y* C D E; *y* 3° *dos ángulos* b a c *y* E D F, *que tienen sus lados paralelos y sus aberturas no están vueltas en el mismo sentido ni en sentido contrario, son suplementarios.*

En el párrafo anterior hemos demostrado la primera parte, esto es, que B A C=b a c.

2° Como el ángulo B A C = C D E (420), se infiere que b a c = C D E.

3° Siendo el ángulo E D F suplemento de C D E, se infiere que E D F y b a c son suplementarios.

617.—*Los planos de dos ángulos* B A C *y* b a c (fig. 282) *cuyos lados son respectivamente paralelos, serán paralelos.*

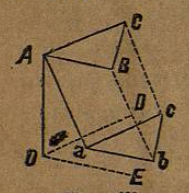

Figura 282.

Desde el punto A bajemos A O perpendicular al plano del ángulo b a c, y por el punto de intersección O tiremos O D y O E respectivamente paralelas á a c y á a b, por lo que O E será paralela á A B, y O D á A C. Ahora bien, siendo A O perpendicular al plano en que están las rectas O D y O E, los ángulos A O D y A O E son rectos, y por razón de las paralelas (409) también lo serán los ángulos O A B y O A C, luego O A es perpendicular á la vez á los planos de los ángulos b a c y B A C, y por lo mismo éstos serán paralelos (606).

618.—*Los triángulos* A B C *y* a b c *formados en el espacio por tres rectas respectivamente iguales y paralelas, son iguales y quedan en planos paralelos.*

dos perpendiculares al plano M N en el mismo punto, lo que no es admisible (596).

626.—*Si dos planos* M *y* N (fig. 285) *son perpendiculares á un tercero* P Q, *su intersección común* A B *será también perpendicular á éste plano* P Q.

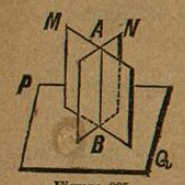

Figura 285.

Porque si por el punto B levantamos una perpendicular al plano P Q, tendrá que estar contenida tanto en el plano M como en el N.

627.—*Si desde un punto* A (fig. 286) *tomado en el interior de un ángulo diedro* M N *se bajan á sus caras las perpendiculares* A B *y* A C, *el ángulo* A *que resulte será suplemento del ángulo diedro.*

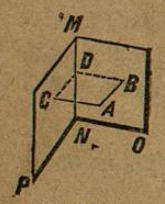

Figura 286.

Por ser A B perpendicular al plano M O, el plano A B D C que pasa por esta recta será perpendicular al plano M O (622) y por tanto el ángulo A B D será recto. Por ser A C perpendicular al plano M P, el plano A B D C que pasa por ella será perpendicular al plano M P, y el ángulo A C D será recto. Siendo el plano A B D C perpendicular á la vez á los planos M O y M P lo será á su intersección común M N (626), y como B D y C D son perpendiculares á la arista del ángulo diedro, el ángulo B D C será la medida del diedro O M N P.

Ahora bien; considerando el cuadrilátero A B D C se tiene (445):

$$A + B + D + C = 4 \text{ rectos.}$$

por otra parte $\quad B + C = 2$ rectos

restando la 2ª ecuación $\quad A + D = 2$ rectos

que es lo que se debía demostrar, supuesto que B D C es la medida del ángulo diedro.

TRIEDROS Y POLIEDROS.

628.—*Se llama ángulo sólido ó ángulo poliedro, la figura que resulta cuando tres ó más planos concurren en el mismo punto* S (fig. 287). *Cuando los planos que concurren en el mismo punto* B *son tres, la figura se llama ángulo triedro. Se da el nombre de poliedro no solo al ángulo formado por muchos planos, sino también al sólido limitado por muchas caras planas.*

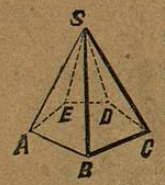

Figura 287.

El punto S es el *vértice* del poliedro; las intersecciones consecutivas S A, S B..... de sus planos son las *aristas;* cada porción de plano indefinido A S B comprendida entre dos aristas es una *cara;* cada ángulo A S B formado por dos aristas consecutivas es un *ángulo plano,* y cada ánguio diedro B S A E formado por dos caras consecutivas, es un ángulo diedro del poliedro.

Un ángulo poliedro se designa por la letra S de su vértice, y cuando hay varios poliedros que tienen el mismo vértice por las letras S A B C D E de sus aristas comenzando por la de su vértice.

Si el espacio del poliedro está limitado por un plano A B C D E, se forma un cuerpo que se llama *sólido,* que en el caso de nuestra figura es una *pirámide* de base pentagonal.

Nos ocuparémos únicamente de *los poliedros convexos,* que son aquellos cuyos ángulos diedros son todos salientes, esto es, que cortados por un plano A B C.... dan por sección un polígono convexo (461).

629.—*En todo ángulo triedro* S (fig. 288) *uno cualquiera de sus ángulos planos* E S G *formado por dos de sus aristas, es menor que la suma de los otros dos.*

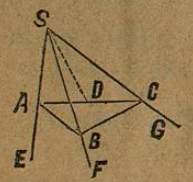

Figura 288.

Nos bastará demostrar que el mayor de los ángulos planos E S G, es menor que la suma de los otros dos, para que se comprenda que con más razón será cierto el teorema con cualquiera de los otros dos.

Construyamos sobre esta cara el ángulo E S D=E S F, tirémos una recta cualquiera A C y tomando S B=S D, trácese la recta A B.

Los triángulos S A D y S A B serán iguales (385), de lo que resulta:

Serán iguales por serlo respectivamente los tres lados de los triángulos (386), y estarán en planos paralelos por ser los lados paralelos (617).

619.—*Un ángulo diedro* B A D C (fig. 283) *tiene por medida el ángulo rectilíneo* B A C *que resulta de levantar perpendiculares á su arista* A D *del mismo punto* A *en cada uno de los dos planos que lo forman.*

En primer lugar observarémos que en cualquier punto de la arista A D en que se levanten perpendiculares, determinarán un ángulo igual á B A C por estar formados por rectas respectivamente paralelas (616).

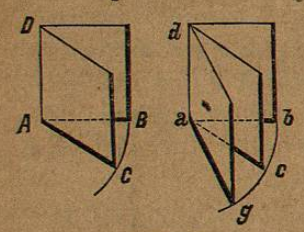

Figura 283.

Para demostrar que los ángulos diedros son proporcionales á los rectilíneos formados por perpendiculares en el mismo punto á su arista, y que por tanto pueden tomarse los últimos como medida de los primeros, demostrarémos préviamente que *si dos ángulos diedros* B A D C *y* b a d c *son iguales lo serán los ángulos rectilíneos* B A C *y* b a c *formados por las respectivas perpendiculares á sus aristas levantadas en cada una de sus caras del mismo punto.*

Siendo por el supuesto iguales los ángulos diedros B A D C y b a d c, si hiciéramos coincidir la cara B D con b d sobreponiendo la arista A D sobre a d, teniendo cuidado de que A cayese sobre a, el plano D C coincidiría con d c. La perpendicular A B coincidiría con a b (395), y la A C con a c; luego el ángulo B A C=b a c.

Ahora bien, si á continuación del ángulo diedro b a d c ponemos su igual c a d g, haciéndolos coincidir por la cara d c, resultará un ángulo diedro b a d g duplo del b a d c, y el ángulo rectilíneo b a c=c a g, por lo que al ángulo diedro duplo b a d g corresponde un ángulo rectilíneo b a g duplo de b a c.

De la misma manera probaríamos que á un diedro triple corresponde un ángulo rectilíneo triple, y en general á un ángulo diedro *n* veces mayor que otro, corresponderá un ángulo rectilíneo formado por las perpendiculares á su arista también *n* veces mayor. Así es que, siendo estos ángulos rectilíneos proporcionales á la magnitud de los ángulos diedros, pueden servirles de medida.

De modo que, en último análisis, los arcos de círculo nos servirán para medir los ángulos diedros. El ángulo que sirve de medida del diedro se le llama *ángulo plano correspondiente del diedro.*

620.—De esto resulta, que cuando uno ó varios planos caen sobre otro, ó lo cortan, se pueden aplicar á los diedros los mismos teoremas que á las rectas que miden los ángulos diedros. Así es, que los ángulos diedros adyacentes son suplementarios; todos los formados al re-

dedor de una arista común valen cuatro rectos; los ángulos opuestos al vértice son iguales, etc., etc.

Igualmente cuando dos planos paralelos están cortados por otro, se tiene que los ángulos diedros alternos internos son iguales, los interiores del mismo lado del plano secante son suplementarios, así como todas las propiedades que hemos demostrado en los casos de rectas paralelas.

621.—Dos planos son perpendiculares cuando el ángulo diedro que forman tiene por medida un recto.

Si un plano es perpendicular á otro, éste también es perpendicular al primero.

622.—*Si una recta* A B (fig. 284), *es perpendicular á un plano* M N, *lo será igualmente cualquier plano* P C *que pasa por ella.*

Si en el plano M N levantamos B O perpendicular á C D intersección común de los dos planos, tendrémos que el ángulo A B O formado por las perpendiculares á C D será la medida del ángulo diedro de los dos planos; pero por ser A B perpendicular á M N, el ángulo A B O es recto; luego el plano P C será perpendicular á M N.

623.—*Por una recta* C D (fig. 284) *contenida en un plano, no se puede levantar más de un plano perpendicular á éste.*

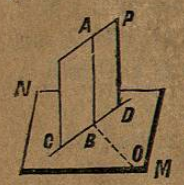

Figura 284.

En razón de que para que el plano P C sea perpendicular á M N, acabamos de ver que es preciso pase por B A perpendicular á M N, y de que se sabe que por un punto B no se puede levantar al plano M N más de una sola perpendicular (596).

624.—*Si dos planos* P *y* M (fig. 284) *son perpendiculares, y en uno de ellos se baja una recta* A B *perpendicular á la intersección común* D C, *esta recta será perpendicular al otro plano* M.

Por ser los planos perpendiculares el ángulo A B O es recto.

Por ser A B perpendicular á C D, el ángulo A B C también es recto, luego A B será perpendicular á todas las rectas que pasan por el punto B contenidas en el plano M N (592) y por tanto será perpendicular á este plano.

625.—*Si dos planos* P *y* M (fig. 284) *son perpendiculares, y en un punto* B *de su intersección común se levanta una recta* B A *perpendicular á uno de los planos* M, *esta recta quedará contenida por entero en el otro plano* P.

Porque si A B no estuviese contenida en el plano P, levantando en este plano en el punto B una perpendicular á C D, se tendrían (624)