dos perpendiculares al plano M N en el mismo punto, lo que no es admisible (596).

626.—*Si dos planos* M *y* N (fig. 285) *son perpendiculares á un tercero* P Q, *su intersección común* A B *será también perpendicular á éste plano* P Q.

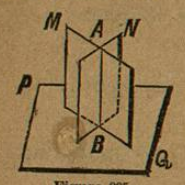

Figura 285.

Porque si por el punto B levantamos una perpendicular al plano P Q, tendrá que estar contenida tanto en el plano M como en el N.

627.—*Si desde un punto* A (fig. 286) *tomado en el interior de un ángulo diedro* M N *se bajan á sus caras las perpendiculares* A B *y* A C, *el ángulo* A *que resulte será suplemento del ángulo diedro.*

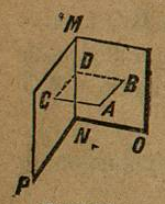

Figura 286.

Por ser A B perpendicular al plano M O, el plano A B D C que pasa por esta recta será perpendicular al plano M O (622) y por tanto el ángulo A B D será recto. Por ser A C perpendicular al plano M P, el plano A B D C que pasa por ella será perpendicular al plano M P, y el ángulo A C D será recto. Siendo el plano A B D C perpendicular á la vez á los planos M O y M P lo será á su intersección común M N (626), y como B D y C D son perpendiculares á la arista del ángulo diedro, el ángulo B D C será la medida del diedro O M N P.

Ahora bien; considerando el cuadrilátero A B D C se tiene (445):

$$A + B + D + C = 4 \text{ rectos.}$$

por otra parte $\quad B + C = 2$ rectos

restando la 2ª ecuación $\quad A + D = 2$ rectos

que es lo que se debía demostrar, supuesto que B D C es la medida del ángulo diedro.

TRIEDROS Y POLIEDROS.

628.—*Se llama ángulo sólido ó ángulo poliedro, la figura que resulta cuando tres ó más planos concurren en el mismo punto* S (fig. 287). *Cuando los planos que concurren en el mismo punto* B *son tres, la figura se llama ángulo triedro. Se da el nombre de poliedro no solo al ángulo formado por muchos planos, sino también al sólido limitado por muchas caras planas.*

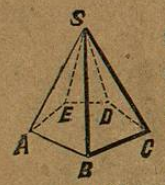

Figura 287.

El punto S es el *vértice* del poliedro; las intersecciones consecutivas S A, S B..... de sus planos son las *aristas;* cada porción de plano indefinido A S B comprendida entre dos aristas es una *cara;* cada ángulo A S B formado por dos aristas consecutivas es un *ángulo plano,* y cada ánguio diedro B S A E formado por dos caras consecutivas, es un ángulo diedro del poliedro.

Un ángulo poliedro se designa por la letra S de su vértice, y cuando hay varios poliedros que tienen el mismo vértice por las letras S A B C D E de sus aristas comenzando por la de su vértice.

Si el espacio del poliedro está limitado por un plano A B C D E, se forma un cuerpo que se llama *sólido,* que en el caso de nuestra figura es una *pirámide* de base pentagonal.

Nos ocuparémos únicamente de *los poliedros convexos,* que son aquellos cuyos ángulos diedros son todos salientes, esto es, que cortados por un plano A B C.... dan por sección un polígono convexo (461).

629.—*En todo ángulo triedro* S (fig. 288) *uno cualquiera de sus ángulos planos* E S G *formado por dos de sus aristas, es menor que la suma de los otros dos.*

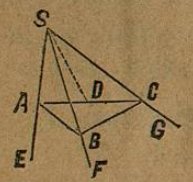

Figura 288.

Nos bastará demostrar que el mayor de los ángulos planos E S G, es menor que la suma de los otros dos, para que se comprenda que con más razón será cierto el teorema con cualquiera de los otros dos.

Construyamos sobre esta cara el ángulo E S D=E S F, tirémos una recta cualquiera A C y tomando S B=S D, trácese la recta A B.

Los triángulos S A D y S A B serán iguales (385), de lo que resulta:

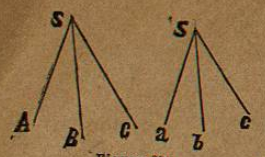

Figura 291.

1° Sea el ángulo diedro S A=s a (fig. 291) é iguales las caras que forman este diedro, esto es, ángulo A S C=a s c y A S B=a s b. Si aplicáramos el ángulo diedro S A sobre s a, por ser iguales los diedros, el plano S A B coincidiría sobre s a b, y el S A C sobre s a c, y por la igualdad de las caras la recta S B coincidiría con s b y S C con s c, así es que los dos triedros coincidirán en todas sus partes, y por lo mismo serán iguales.

2° Sea la cara A S B=a s b adyacente á los ángulos driedros, A S igual á a s y B S igual á b s. Si sobrepusiéramos los ángulos A S B y a s b iguales, por la igualdad de los diedros adyacentes el plano A S C coincidiría con a s c, y el plano B S C con b s c, de lo que resulta que coincidiría la intersección S C de los primeros con la s c de los últimos, y de esto se infiere la igualdad de los triedros en todas sus partes.

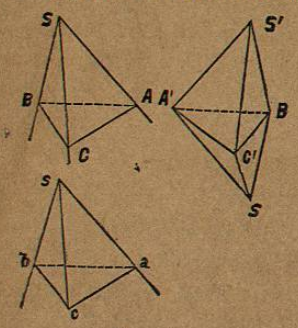

Figura 292.

3° Cuando los triedros tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales, ya demostramos en el número 631 que sus ángulos diedros también son iguales; pero para que los triedros puedan sobreponerse se necesita que las caras respectivamente iguales estén dispuestas en el mismo orden. En la figura 292 los triedros S y s serán sobreponibles porque están formados no sólo de caras iguales, sino dispuestas en el mismo orden; pero no es posible sobreponer los triedros S y S' en los que los ángulos iguales A S B=A' S' B, A S C=A' S' C' y B S C=B S' C' no están colocados de la misma manera. En efecto, para poder sobreponer el triángulo A B C sobre su igual A' B C', se necesita invertir el triedro S y hacerlo tomar la posición S A' B C', que como verémos más adelante (648), es *simétrica* con respecto á la de S'. Esta observación de que la igualdad de todas las partes de un triedro no implica que puedan sobreponerse sino en el caso de que sus partes constitutivas, caras y diedros, estén agrupadas en el mismo orden, se refiere igualmente á las dos primeras condiciones de igualdad de los triedros.

En el número 634 considerarémos un 4° caso de igualdad de los triedros, y es cuando están formados por diedros iguales.

633.—*Si desde un punto* S (fig. 293) *tomado en el interior de un ángulo triedro* s *se bajan perpendiculares* S A, S B *y* S C *sobre sus tres caras y se hacen pasar planos por las perpendiculares, se formará un segundo ángulo triedro* S *cuyos ángulos planos* A S B, B S C *y* C S A *son respectivamente suplementos de los ángulos diedros* s D, s E *y* s F

opuestos del primer triedro s. *Recíprocamente las caras del triedro* s *serán suplementos de los ángulos diedros del triedro* S.

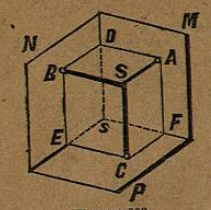

Figura 293.

Considerando el cuadrilátero S A D B en el que los ángulos en A y en B son rectos, hemos demostrado (627) que el ángulo A S B es suplemento del ángulo A D B que es la medida del diedro s D, y como la misma demostración es aplicable á los cuadriláteros S B E C y S C F A queda probada la proposición directa.

Para demostrar que las caras del triedro s son suplementos de los ángulos diedros según S A, S B y S C, considerarémos el cuadrilátero D s F A. Por pasar el plano A C por las rectas S A y S C perpendiculares á los planos M s y P s, será perpendicular á la vez á ambos (622) y á su intersección común s F (626), luego el ángulo A F s es recto. Por pasar el plano A B por las perpendiculares S A y S B á los planos M s, y N s, será perpendicular á la vez á ambos y á su intersección s D, luego el ángulo s D A es recto. Así es que

A F s+F s D+s D A+D A F=4 rectos (445).

A F s+s D A=2 rectos

restando, resulta: F s D+D A F=2 rectos.

pero F s D es la cara del triedro s, y D A F es la medida del diedro A S, por ser esta arista perpendicular á M s y por consiguiente á las rectas D A y A F contenidas en el plano M s, que pasan por su pié.

Del mismo modo demostraríamos que las otras caras de s son suplementos de los diedros opuestos de S.

Dos triedros tales como S y s se llaman *suplementarios*, y un triedro cualquiera tiene siempre otro que le es suplementario.

Si llamamos d, d' y d'' los ángulos diedros del triedro s, según las aristas E s, D s y F s, y representamos por c, c' y c'' los ángulos B S C, B S A y A S C de las caras del triedro suplementario S, por ser d+c, igual á dos ángulos rectos, así como d'+c', y d''+c'', tendrémos:

d+d'+d''+c+c'+c''=6 rectos.... (1)

y como (630) c+c'+c''<4 rectos

restando esta desigualdad de la ecuación, resulta:

1° que d+d'+d''>2 rectos

y trasladando en la (1) tendrémos $d+d'+d''=6$ rectos$-(c+c'+c'')$

lo que significa 2° que $d+d'+d''<6$ rectos

luego *la suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos ángulos rectos y menor que seis.*

634.—*Dos ángulos triedros* s *y* s' *que tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales, serán iguales.*

Para que los triedros que hemos llamado s y s' sean iguales, tendrémos que deducir que los ángulos planos de sus caras lo son. Si llamamos S y S' dos triedros respectivamente suplementarios de s y de s'; siendo los ángulos diedros de s respectivamente iguales á los de s', los triedros S y S' tendrán sus caras respectivamente iguales, por ser estas caras suplemento de los ángulos diedros de s y de s', y por tanto (632—3°) los triedros S y S' serán iguales. Ahora bien: siendo iguales los ángulos diedros de S y S' las caras de sus suplementarios s y s' lo serán, que es lo que se debía demostrar.

635.—Un poliedro toma el nombre de *tetraedro* cuando está formado por la reunión de 4 planos; el de *pentaedro* cuando lo está por 5 planos; el de *exaedro* si lo forman 6; *eptaedro,* si lo forman 7 caras, etc.

636.—*Dos ángulos poliedros son iguales:* 1° *cuando tienen sus ángulos diedros iguales formados por ángulos planos respectivamente iguales y colocados de la misma manera; y* 2° *cuando tienen sus aristas paralelas y distribuidas en el mismo orden* (fig. 294).

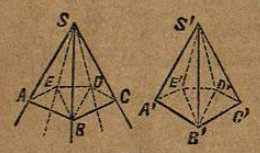

Figura 294.

1° Si los poliedros S y S' tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales formados por caras iguales dispuestas en el mismo orden, y si por una de sus aristas S B y S' B' tiramos planos á todas las demás, para probar que son iguales demostrarémos que lo son los triedros en que quedan descompuestos.

El triedro S A B E=S' A' B' E' por tener el diedro S A=S' A' formado por ángulos iguales A S B=A' S' B' y A S E=A' S' E' (632—1°) De esto resulta: 1° que el ángulo diedro A E S B=A' E' S' B', y 2°, que la cara E S B=E' S' B'.

Para demostrar que el triedro S E B D=S' E' B' D' tenemos: que si de los ángulos diedros A E S D=A' E' S' D' restamos los iguales

A E S B=A' E' S' B'

nos queda B E S D=B' E' S' D'

formados por las caras iguales E S B=E' S' B' y E S D=E' S' D', luego (632—1°) los triedros que consideramos son iguales; pudiendo demostrarse lo mismo con los S B D C y S' B' D' C'.

2° Si las aristas de los poliedros S y S' son paralelas y están distribuídas en el mismo orden, los ángulos planos serán iguales (616), y por serlo éstos lo serán también los ángulos diedros de los triedros en que puedan descomponerse (631), luego serán iguales las partes de ambos poliedros.

637.—*La suma de los ángulos planos* A S B, B S C..... (fig. 295) *formados en el vértice* S *de un poliedro es menor que cuatro rectos.*

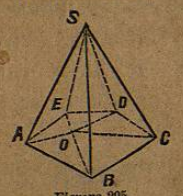

Figura 295.

Cortemos el poliedro por un plano A B C D E, tomemos en su interior un punto O y reuniéndolo con los vértices A, B, C..... resultarán en O y en S tantos triángulos como lados tiene el poliedro. Para simplificar

harémos la suma de los ángulos A O B+B O C+C O D....=O

" " " A S B+B S C+C S D....=S

Como los ángulos en O valen 4 rectos, vamos á demostrar que S<O.

Como el número de triángulos formados al rededor de O es el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, la suma de los ángulos de todos los triángulos formados al rededor de O será igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es

O+E A B+A B C+....=S+S A E+S A B+S B A+S B C....(1)

Por otra parte (629) E A B<S A E+S A B

A B C<S B A+S B C, etc.

sumando ordenadamente estas desigualdades

E A B+A B C+....<S A E+S A B+S B A+S B C+....(2)

restando los términos de esta desigualdad de los de la ecuación (1), como cuando el sustraendo aumenta, la resta disminuye (49), resulta que

ángulos en O>S

pero como los ángulos en O valen cuatro rectos, se infiere que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S de un poliedro es menor que cuatro rectos.

$$AB = AD$$

por otra parte $$AB + BC > AC$$

restando los términos de la ecuación de los de la desigualdad, se tiene:

$$BC > DC$$

Considerando los triángulos C S B y C S D, en los que los ángulos C S B y C S D están formados por lados respectivamente iguales, el opuesto al mayor lado B C será el mayor, esto es

ángulo $$BSC > CSD$$
agregando los iguales $$BSA = ASD$$
resulta $$BSC + BSA > ASC$$

que es lo que se tenía que demostrar.

630.—*La suma de los tres ángulos planos* A S B + B S C + C S A (fig. 289), *formados en el vértice de un triedro, es menor que cuatro rectos.*

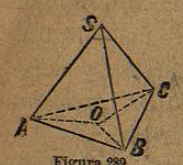

Figura 289.

Cortemos el triedro por un plano cualquiera A B C, y tomando en el interior de este triángulo un punto O, reunámoslo con los tres vértices, A, B y C, con lo que resultarán tres triángulos colocados en el mismo plano cuyo vértice común es O, y otros tres triángulos cuyos vértices concurren en el S del triedro. Para simplificar harémos la suma de los ángulos

$$AOB + BOC + COA = O$$

y $$ASB + BSC + CSA = S$$

Como los ángulos en O valen 4 rectos, nuestro raciocinio tendrá por objeto demostrar que S < O.

Como el número de triángulos formados al rededor de O es el mismo que el de los formados en S, y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, resulta que la suma de los ángulos de los triángulos en O, es igual á la suma de los ángulos de los triángulos en S. Esto es,

$$O + CAB + ABC + BCA = S + SAC + SAB + SBA + SBC + SCB + SCA \ldots (1)$$

Por otra parte (629) $$CAB < SAC + SAB$$
$$ABC < SBA + SBC$$
$$BCA < SCB + SCA$$

sumando ordenadamente estas tres desigualdades

$$CAB + ABC + BCA < SAC + SAB + SBA + SBC + SCB + SCA \ldots (2)$$

Si restamos los términos de esta desigualdad de los de la ecuación (1) como cuando el substraendo aumenta, la resta disminuye (49), resulta:

ángulos en $$O > S$$

y como los ángulos en O=4 rectos, se tiene que la suma de los ángulos planos formados en el vértice S será menor que cuatro rectos.

631.—*Dos triedros* S *y* s (fig. 290) *formados por ángulos planos respectivamente iguales,* D S E=d s e, D S F=d s f *y* E S F=e s f, *tienen sus ángulos diedros iguales.*

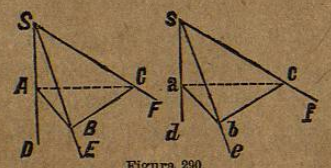

Figura 290.

Tomemos S A=s a, y por los puntos A y a hagamos pasar planos A B C y a b c respectivamente perpendiculares á S D y á s d. El triángulo S A B es igual á s a b (384) por tener S A=s a adyacente á los ángulos A S B=a s b por ángulos planos del triedro y S A B=s a b por rectos. Por la misma razón el triángulo S A C es igual á s a c, y de esto se deduce que A B=a b, A C=a c y que el triángulo B S C igual á b s c por tener el ángulo E S F=e s f formado por los lados iguales S B=s b y S C=s c (385) luego B C=b c. Siendo respectivamente iguales los tres lados del triángulo A B C á los del triángulo a b c, estos dos triángulos serán iguales (386), por lo que el ángulo B A C=b a c; pero como estos ángulos son medida de los diedros formados sobre S D y s d, éstos también serán iguales. Demostraríamos que los diedros según S E y s e, y los según S F y s f son iguales, tomando partes iguales sobre estas aristas levantándoles planos perpendiculares y haciendo un raciocinio idéntico al anterior.

632.—*Dos triedros son iguales:* 1° *cuando tienen un ángulo diedro igual formado por dos ángulos planos respectivamente iguales y situados en el mismo orden;* 2° *cuando tienen un ángulo plano igual, adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales situados de la misma manera; y* 3° *cuando tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales dispuestos en el mismo orden.*