649.—*Dos figuras planas simétricas con relación á un eje son iguales.*

Si, por ejemplo, tenemos el triángulo A B C simétrico con A' B' C' é hiciéramos girar la parte A B C al rededor de D o F, cada uno de los puntos A, B, C coincidirá con sus simétricos A', B' y C' al girar 180°, supuesto que B D es perpendicular á D o F é igual á D B' sucediendo otro tanto con o A y F C respecto á o A' y á F C'

650.—*La simetría con relación á un punto ó á una recta, envuelve siempre la condición de simetría con respecto á un plano.*

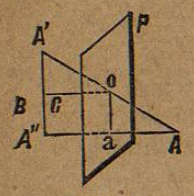

Figura 300

En efecto, sean A y A' dos puntos simétricos con relación al centro o (fig. 300). Hagamos pasar un plano P por o y tiremos B o perpendicular al plano. Vamos á demostrar que el punto A'', simétrico de A', con respecto al eje B O lo es igualmente de A con relación al plano P.

Sea a el punto donde A A'' encuentra al plano P. Siendo C el medio de A' A'' y o el medio de A A', A A'' será paralela á o C (511), y por consiguiente perpendicular al plano P. La recta o a perpendicular á o C será paralela á A' A'', y como pasa por la mitad de A A', el punto a será igualmente el medio de A A''; luego los puntos A A'' son simétricos con relación al plano P.

Se ve, pues, por una parte, que la simetría de los puntos A y A' respecto á un centro, produce la simetría respecto á un plano, y por otra que la simetría de A'' y A' con relación á un eje B o, envuelve igualmente la simetría respecto al plano entre A'' y A. Ahora, como lo que se ha probado de un punto es aplicable á todos los de una figura, resulta que nos bastará ocuparnos de la simetría con relación á un plano.

651.—*Si tres puntos* A, B *y* C (fig. 301) *están en línea recta, sus simétricos* A', B' *y* C' *con relación á un plano lo estarán igualmente.*

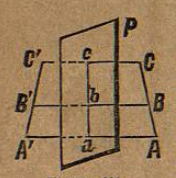

Figura 301.

Las rectas A A', B B' y C C', por ser perpendiculares al plano P, serán paralelas, y por pasar por la recta A B C determinan un plano cuya intersección con P es la recta a b c. Si se hiciera girar A B C al rededor de a c por ser perpendiculares á c a é iguales las rectas C c y c C' b B y b B', a A y a A', los puntos A, B y C caerían sobre A' B' y C', y estando los primeros en línea recta, se infiere que también lo están sus simétricos.

652.—En consecuencia, *para que dos rectas sean simétricas, basta que lo sean dos de sus puntos.*

653.—Se deduce también (651) *que la distancia de dos puntos es igual á la de sus simétricos.*

654.—*Cuando cuatro puntos* A, B, C *y* D (fig. 302) *están en un mismo plano, sus simétricos* A' B' C' *y* D' *también estarán en un plano.*

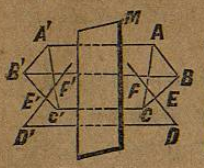

Figura 302.

Para probar que el punto D' está en el plano A' B' C' tirarémos la recta D F que encuentre á B C y á C A en E y en F. Estando D, E y F en línea recta lo estarán igualmente sus simétricos. D', E' y F'; pero E' como simétrico de E estará sobre la recta B' C' y F' simétrico de F, sobre A' C', luego D' que pertenece á la recta E' F' tendrá que estar sobre el mismo plano que el ángulo B' C' A' que es lo que se debía demostrar.

655.—*De esto resulta que, para que dos planos sean simétricos basta que lo sean tres de sus puntos respectivamente, y para que dos polígonos ó poliedros sean simétricos, es suficiente que lo sean sus respectivos vértices.*

656.—*Los triángulos, así como los ángulos simétricos, son iguales.*

En efecto, en la figura 302 se tiene: A B=A' B', B C=B' C', y A C=A' C' luego los triángulos A B C y A' B' C' serán iguales.

Además de la igualdad de los triángulos resulta que los ángulos simétricos son iguales: A C B=A' C' B', C A B=C' A' B', etc.

657.—*Dos poliedros simétricos tienen todas sus partes respectivamente iguales.*

Las caras correspondientes serán iguales, porque pueden descomponerse en triángulos simétricos y por lo mismo iguales. Si se consideran tres aristas de un poliedro y sus correspondientes del otro, por una parte por ser simétricas serán iguales, y por otra los ángulos simétricos que forman también lo serán. Siendo iguales los ángulos planos, lo serán los diedros de los triedros en que pueden descomponerse los poliedros. Esto es, serán respectivamente iguales sus aristas, sus caras, sus ángulos diedros y los triedros de que están formados.

SUPERFICIES DE LOS CUERPOS.

658.—*Se llama prisma á un cuerpo ó poliedro* A c (fig. 303) *terminado por superficies planas, siendo las bases* A D *y* a d *polígonos iguales y paralelos, y las caras laterales* A b, B c.... *paralelógramos.*

Un paralelipípedo está completamente determinado cuando se conoce uno de sus triedros A y la posición y magnitud de las tres aristas que lo forman. Cualquiera de sus caras puede tomarse por base.

664.—*La sección A B c d que determina el plano que pasa por dos aristas A B y d c opuestas de un paralelipípedo, es un paralelógramo.*

Siendo a b respectivamente igual y paralela á A B y á d c, A B y d c serán iguales y paralelas (602), y por lo mismo la figura A c será paralelógramo (450).

665.—*Las diagonales A c, B d, a C y b D* (fig. 307) *de un paralelipípedo, se cortan en partes mútuamente iguales y en el mismo punto o.*

Por ser la sección A B c d un paralelógramo, las diagonales A c y B d se cortarán en partes mútuamente iguales en el punto o (451). Si consideramos ahora la sección D A b c hecha por las aristas opuestas D A y b c, resulta que la diagonal A c de este nuevo paralelógramo, debe ser cortada por la D b en dos partes iguales, y por lo mismo tendrá que pasar por el mismo punto o, y como otro tanto puede demostrarse respecto á la diagonal a C, resulta que las cuatro diagonales se cortan en partes mútuamente iguales en el punto o.

666.—*Cuando la base A C* (fig. 308) *de un paralelipípedo es un rectángulo, y además las aristas laterales son perpendiculares á las bases, se dice que el paralelipípedo es rectangular.*

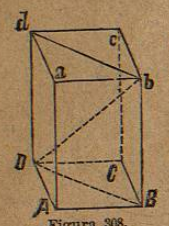

Figura 308.

En este caso todas las caras son rectángulos, y cada una de las aristas es perpendicular á las que pasan por sus extremos, así como á los planos sobre que cae.

Un paralelipípedo recto A c queda dividido en dos prismas triangulares iguales A B D a y C B D c por un plano d b B D que pasa por las diagonales d b y D B de sus bases.

En efecto si hiciéramos coincidir las aristas iguales A a y C c, siendo las tres caras que forman el triedro C respectivamente iguales á las caras que forman el triedro A (632—3°) estos triedros coincidirían. Por la misma razón el triedro c coincidiría con el a, y siendo común á los dos prismas triangulares la cara d b B D, se infiere que serán iguales los prismas triangulares A B D a y C B D c.

667.—*El cuadrado de la diagonal D b* (fig. 308) *de un paralelipípedo rectangular, es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas que forman uno de sus triedros.*

Por ser rectángulo en B el triángulo b D B se tiene:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + D\,B^2 \ldots . (1)$$

siendo el triángulo D A B rectángulo en A, se tiene:

$$D\,B^2 = D\,A^2 + B\,A^2 \ldots . (2)$$

sustituyendo en la ecuación (1) y reemplazando por D A su igual B C resulta:

$$D\,b^2 = B\,b^2 + B\,C^2 + B\,A^2 \ldots . (3)$$

que es lo que se debía demostrar.

Como las aristas de todos los triedros son respectivamente iguales, resulta que en el paralelipípedo rectangular las diagonales son iguales, además de verificarse en él las propiedades de los prismas y de los paralelipípedos en general.

668.—*Se llama cubo un paralelipípedo rectangular cuyas seis caras* (fig. 309) *son cuadrados.*

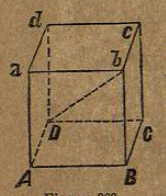

Figura 309.

En el cubo las caras son todas iguales entre sí, así como sus doce aristas. Las caras y las aristas son respectivamente perpendiculares. La gran simetría del cubo ha hecho que se le tome para unidad de volumen en los cuerpos.

Siendo las aristas del cubo A B = B b = B C iguales entre sí, introduciendo estos valores en la ecuación (3) del párrafo anterior resulta:

$$D\,b^2 = 3\,A\,B^2$$

esto es, *en el cubo el cuadrado de su diagonal es igual al triple del cuadrado de una de sus aristas.*

669.—*Se llama superficie de revolución la que puede concebirse engendrada por una línea, recta ó curva, A C B D* (fig. 310) *que gira al rededor de una recta A B que le sirve de eje.*

Figura 310.

El carácter distintivo de esta clase de superficies, es, que sea cual fuere la línea generatriz A C D B, cualquier plano perpendicular al eje produce por su intersección una circunferencia de círculo. En efecto, una recta cualquiera D o perpendicular al eje, describirá un plano perpendicular al eje, y como la distancia o D permanece fija, el punto D trazará una circunferencia de círculo.

670.—*Se llama cilindro un prisma cuyas bases paralelas* A B *y* a b (fig. 311) *son círculos.*

Aunque las bases pueden ser otras curvas, en la geometría elemental no se considera sino el cilindro de base circular.

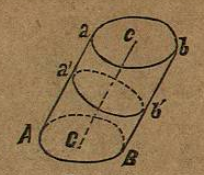

Figura 311.

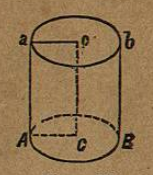

Figura 312.

La línea C c que une los centros de las bases, se llama *eje del cilindro.* Cuando el eje no es perpendicular á las bases del cilindro, se llama *oblícuo,* y cuando el eje es perpendicular á las bases (fig. 312) *el cilindro es recto.* La *altura* de un cilindro es la distancia de sus bases.

Lo mismo que un prisma, el cilindro puede concebirse originado por el movimiento de una recta A a paralelamente al eje, y de la que uno de sus extremos recorre una circunferencia de círculo. De esto resulta que cualquiera sección paralela á las bases produce un círculo igual á éstas.

El cilindro recto (fig. 312) puede concebirse engendrado por la rotación de un rectángulo A c al rededor de uno de sus lados C c, que viene á ser el eje del cilindro.

671.—Como el cilindro es un prisma de base circular, y el círculo puede considerarse como un polígono regular de una infinidad de lados, resulta que *la área lateral del cilindro oblícuo es igual al producto de su generatriz* A a (fig. 311) *por la longitud de la curva* a' b' *de la sección que le es perpendicular.* (659)

672.—Por la misma consideración *la área lateral del cilindro recto es igual al producto de su altura por la circunferencia del círculo de su base.*

Si llamamos s la área lateral del cilindro, r el radio de su base, h su altura y π la razón de la circunferencia al diámetro igual á 3'141593, la expresión del área lateral del cilindro recto será:

$$S=2\,\pi\,r\,h$$

673.—*La área total de un cilindro es igual á la lateral más la de sus dos bases.*

La área total del cilindro recto tendrá en consecuencia por expresión:

ó $$S=2\,\pi\,r\,h+2\,\pi\,r^2$$

$$S=2\,\pi\,r\,(h+r)$$

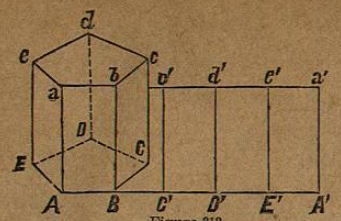

Figura 313.

674.—Si en el prisma A d (figura 313) concebimos que la cara E a gira al rededor de E e hasta ponerse en el plano de e D, en seguida que las dos caras se colocaran en el plano de c D, y las tres caras girando sobre C c se pusiesen en el plano de C b, y girando por último todo el sistema al rededor de B b se colocara en la prolongación del plano de la primera cara A b, resultaría la superficie lateral del prisma tendida en plano é igual al rectángulo A a'. Las partes que componen este rectángulo son respectivamente iguales á las que forman la área lateral del prisma. La área de este rectángulo es equivalente á la lateral del prisma, teniendo una y otra por valor el producto de la arista A a por A A' que es el perímetro de la base.

La figura A a a' A' se llama el *desarrollo* de la superficie lateral del prisma A d.

Igualmente el *desarrollo* de un cilindro recto es un rectángulo cuyas bases son las circunferencias del cilindro, y su altura la de este cuerpo.

La superficie lateral de un cilindro oblícuo A b (fig. 314) también puede desarrollarse en plano. Para esto tirarémos la recta a' a' igual á

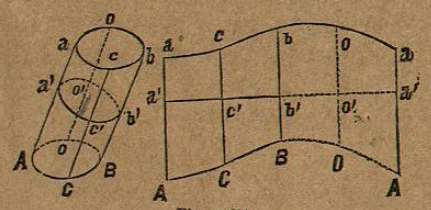

Figura 314.

la curva a' c' b' o' a' que daría la sección hecha perpendicularmente á la generatriz A a; sobre esta recta se llevarán las partes a' c', c' b'.... respectivamente iguales á las partes de la curva rectificadas a' c', c' b'....; por los puntos de división a', c'.... se levantarán perpendiculares y sobre ellas se llevarán las partes a' a=a' a de la generatriz, a' A=a' A, c' c=c' c, c' C=c' C.... y se tendrá la área A a a A, terminada por dos curvas paralelas, que será el desarrollo de la superficie lateral del cilindro oblícuo.

675.—*La área total de una pirámide* S A D (fig. 315) *es igual á la suma de las áreas de los triángulos que forman sus caras y la del polígono* A B C D.... *de su base.*

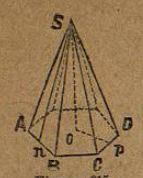

Figura 315.

676.—*La área lateral de una pirámide regular* S A D (fig. 315) *tiene por valor la mitad del producto del perímetro de su base por el apotema* S n.

Se llama *apotema, la altura* S n *de uno de los triángulos de las caras de la pirámide.* Cuando ésta es regular, su base es un polígono regular y su altura S o es una perpendicular que cae en el centro de la base. De esto resulta que las caras de una pirámide regular son triángulos iguales, pues por una parte sus bases A B, B C.... son lados de polígono regular, y por otra los lados S A, S B.... son oblícuas que se separan igualmente del pie de la perpendicular. Las alturas de estos triángulos son todas iguales á S n.

Así, pues, la área lateral de la pirámide será igual á

$$\tfrac{1}{2}\,S\,n\,(A\,B+B\,C+\ldots.)$$

y si llamamos s esta área, A el apotema S n, y p el perímetro A B C D de la base, se tendrá:

área lateral de la pirámide $s=\frac{1}{2}\,p\,A$:

Para obtener la área total de la pirámide, á la lateral debemos agregarle la del polígono de la base que tiene por valor $\frac{1}{2}$ p. r, llamando r el radio recto o p. Así, pues,

área total de la pirámide $=S=\frac{1}{2}\,p\,A+\frac{1}{2}\,p\,r$

ó „ „ „ $=S=\frac{1}{2}\,p\,(A+r)$

677.—Se llama *trozo de pirámide la parte de una pirámide comprendida entre la base* A D *y la sección hecha por un plano* a d (fig. 316) *que le es paralelo.*

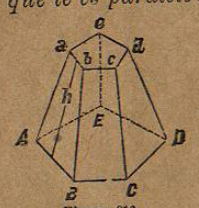

Figura 316.

La área lateral de un trozo de pirámide recta tiene por valor el producto de la altura h *de una de sus caras por la semisuma de los perímetros de sus bases.*

Las caras del trozo son trapecios iguales, cuyas alturas todas son iguales á h, y como la área de cada trapecio (565) es igual al producto de su altura por la semisuma de las bases A B+a b, la de todo el trozo tendrá por medida el producto de la altura de una de las caras por la semisuma de los perímetros A B C....+a b c de sus bases.

678.—Se llama *cono una pirámide* S A B (fig. 317) *cuya base es un círculo.*

Aunque la base puede ser una curva cerrada cualquiera, en la geometría elemental solo se considera el cono de base circular.

La recta S o que une el vértice con el centro de la base, se llama *eje* del cono, que *es recto* cuando el eje es perpendicular á la base, y *oblícuo* en el caso contrario. *Altura* del cono es la perpendicular bajada del vértice sobre la base.

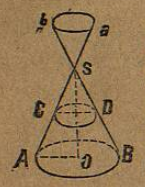

Figura 317.

El cono puede concebirse originado por el movimiento de una recta S A sujeta á pasar constantemente por un punto S y recorrer con otro de sus puntos la circunferencia A B. La recta S A traza otra capa cónica superior S a b, que á veces se considera. Cuando el cono es recto, como en la figura 317, puede considerarse engendrado por la revolución de un triángulo rectángulo S o A girando al rededor de uno de sus catetos S o. Por esta razón (669) cualquiera sección C D hecha paralelamente á la base en el cono, produce un círculo.

679.—*La área lateral del cono recto tiene por valor la mitad del producto de su generatriz* S A *por la circunferencia de la base.*

Esto resulta de que el cono es una pirámide cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados (676). Si llamamos A el lado S A del cono, y r el radio A o de su base, tendrémos:

$$\text{área lateral del cono}=s=\pi\,r\,A.$$

Para obtener la área total debemos agregar la del círculo de la base, por lo que

$$\text{área total del cono}\quad S=\pi\,r\,A+\pi r^2=\pi\,r\,(A+r)$$

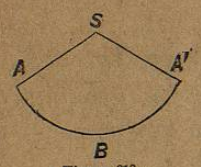

Figura 318.

La área lateral de un cono recto puede desarrollarse en plano, y es un sector de círculo S A B A' (fig. 318) *cuyo radio es la generatriz* S A *de la figura 317, y el arco* A B A' *es igual á la circunferencia de la base.*

En efecto, basta concebir cortada la superficie lateral del cono según una de sus generatrices S A, para comprender que al extender esta superficie se formaría un sector, supuesto que por una parte todas las generatrices vienen á concurrir al punto S, y por otra todos los puntos de la circunferencia de la base conservan una distancia igual á S A al vér-

tice S. Además, la área del sector (570) y la lateral del cono tienen por valor la misma expresión, pues ambos son iguales á $\frac{1}{2}$ S A×A B A'.

Para determinar el número de grados del ángulo A S A' observarémos que la longitud del arco A B A' que le sirve de medida, es la de la circunferencia del círculo O (fig. 317) base del cono. Por consiguiente conservando las anotaciones de A para el lado S A del cono, y r para el radio A O de la base; y representando por x el número de grados del ángulo A S A', tendrémos:

$$\text{longitud del arco A B A'} = 2\,\pi\,r$$

Por otra parte, conocida esta longitud, se determinará el número de grados del arco A B A' por la proporción:

$$\text{circf. A S : arco A B A'} :: 360^\circ : x$$

$$2\,\pi\,A : 2\,\pi\,r :: 360^\circ : x^\circ = \frac{r.\,360^\circ}{A}$$

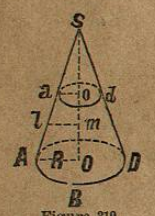

Figura 319.

680.—*La área lateral del trozo de cono recto* A D d a (fig. 319) *tiene por valor el producto de su generatriz* A a *por la semisuma de las circunferencias de sus bases* A D *y* a d.

Aun cuando esto es una consecuencia de lo que dejamos probado en el número 677, lo demostrarémos directamente.

Llamemos R el radio de la base inferior cuya circunferencia es $2\,\pi$ R, r el radio de la base superior cuya circunferencia es $2\,\pi$ r, y l el lado A a del tronco. La área lateral que buscamos es igual á la del cono S A D menos la del cono S a d. Representándola por T tendrémos (679)

$$T = \pi\,R.\ S\,A - \pi\,r.\ S\,a \ldots (1)$$

$$S\,A = l + S\,a \text{ y } S\,A - S\,a = l$$

sustituyendo $T = \pi\,R\,(l + S\,a) - \pi\,r\,S\,a = \pi\,R\,l + \pi\,S\,a\,(R - r) \ldots (2)$

Vamos á determinar el valor de S a en función de los radios y del para sustituirlo en esta ecuación. Comparando los triángulos semejantes S A O y S a o, se tiene:

$$R : r :: S\,A : S\,a$$

Dividiendo $\quad R - r : r :: S\,A - S\,a : S\,a = \frac{r\,l}{R - r}$

sustituyendo en la ecuación (2)

$$T = \pi\,R\,l + \frac{\pi\,r\,l}{R - r}(R - r)$$

reduciendo y sacando l como factor común, se tiene por último:

$$T = l\,(\pi\,R + \pi\,r) \ldots (3)$$

que es lo que se debía demostrar.

Considerando el trapecio a o O A (459), en el que l es el medio de

A a, se tiene: $\quad l\,m = \frac{1}{2}\,(R + r)$

multiplicando por $2\,\pi$ $\quad 2\,\pi.\ l\,m = \frac{1}{2}\,(2\,\pi\,R + 2\,\pi\,r)$

$$2\,\pi.\ l\,m = \pi\,R + \pi\,r$$

sustituyendo en la ecuación (3) resulta:

$$T = l \times 2\,\pi.\ l\,m$$

Esto es, *la área lateral del trozo de cono recto tiene por valor el producto de su lado por la circunferencia del círculo tirado á distancias iguales de sus bases.*

681.—*Se llama esfera un cuerpo* A O B N (fig. 320) *limitado por una superficie curva cuyos puntos todos están á igual distancia de uno interior* C *llamado centro.*

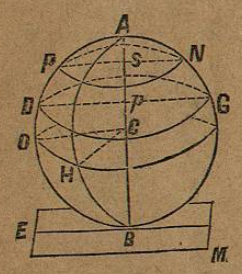

Figura 320.

La esfera puede considerarse engendrada por la revolución de un semicírculo A D B al rededor de su diámetro A B. Cuando se corta la esfera por un plano que pasa por su centro C, se produce un círculo A O B N que se llama *círculo máximo. Todos los círculos máximos de una esfera son iguales,* porque todos tienen por radio el de la esfera. De esto resulta que la esfera puede considerarse engendrada por la revolución de cualquiera de sus círculos máximos.

Un plano, sea cual fuere su dirección, corta la esfera según un círculo.

Si este plano fuera por ejemplo P N, levantando el diámetro A B perpendicular, podría suponerse la esfera engendrada por el semicírculo A P O B girando al rededor de este eje A B, y por consiguiente [669] la sección hecha por un plano perpendicular al eje, tiene que ser un círculo.

Todo círculo, cuyo centro no coincide con el de la esfera, trazado en su superficie, se llama círculo menor. P N *y* D G son círculos menores.

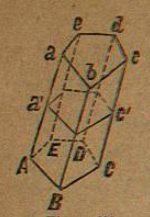

Figura 303.

El prisma puede considerarse engendrado por el movimiento de una recta A a que constantemente permanece paralela á sí misma y que uno de sus extremos A recorre el polígono A B C D E.

Las rectas A a, B b ... se llaman aristas laterales, y las A B, B C.... a b, b c.... aristas de las bases.

Altura del prisma es la distancia de sus bases. Un prisma es *recto* ú *oblícuo*, según que sus aristas son perpendiculares ú oblícuas con relación á sus bases. Se dice que es *triangular, cuadrangular, pentagonal*.... cuando su base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono....

Se llama *prisma regular* el que además de ser recto, tiene por base un polígono regular.

Todas las caras laterales de un prisma son paralelógramos, puesto que según la definición de prisma las aristas de las bases son iguales y paralelas (450) a b=A B, b c=B C, etc.

Las bases A D y a d, y las secciones como a' c' paralelas á éstas, son iguales, supuesto que por una parte son iguales los lados de los polígonos de estas secciones y por otra lo son sus ángulos por estar formados por lados paralelos (616).

Un prisma queda completamente determinado cuando se conoce la posición y magnitud de su base y de una arista lateral.

659.—*La área lateral de un prisma oblícuo es igual al producto de una de sus aristas A* a *por el perímetro de la sección* a'*b' c' d'* (figura 304) *perpendicular á ésta.*

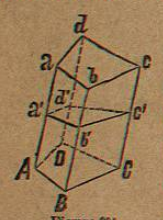

Figura 304.

El área lateral del prisma es igual á la suma de las áreas de las caras laterales que lo forman; pero como estas caras son paralelógramos, la superficie de cada una es igual al producto de su base por su altura. Las bases de los paralelógramos son las aristas del prisma, que todas son iguales á A a, y sus alturas respectivas son los lados de la sección a' b' c' d' que por ser perpendicular á una de ellas lo será á todas las demás. Así es que haciendo la suma de las áreas de los paralelógramos, resulta que la área lateral del prisma es igual al producto de una de sus aristas por el perímetro de la sección que le es perpendicular.

660.—*La área lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista por el perímetro de su base.*

Porque en el caso de ser recto el prisma, la sección perpendicular á su arista es el perímetro de su base. De otro modo, si en la figura 304 la porción de prisma a' c la colocáramos en la parte inferior haciendo

coincidir la base a c con su igual A C, el prisma oblícuo se convierte en recto conservando la misma área lateral, cuyo valor es el producto de su arista por el perímetro de su nueva base a' b' c' d'.

661.—*La área total de un prisma cualquiera es igual á la lateral, más la de sus bases. La total de uno regular es igual al producto del perímetro de su base por la suma de su arista con el radio recto de la base.*

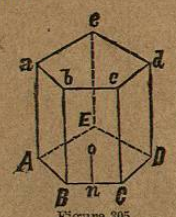

Figura 305.

La primera parte no necesita demostración.

Si llamamos A la área total del prisma regular A d (fig. 305), p el perímetro A B C D E de la base, y r el radio recto o n de este polígono tendrémos:

$$A = A\,a \times p + 2.\ p \times \tfrac{1}{2}\,r = p\,(A\,a + r)$$

que es lo que se debía demostrar.

662.—*La área de un trozo de prisma A d* (fig. 306) *es igual á la suma de las áreas de sus caras.*

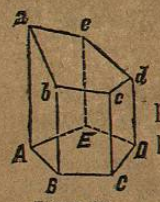

Figura 306.

Se llama trozo de prisma la parte de un prisma comprendido entre una de las bases A D y la sección hecha por un plano a d que no es paralelo á la base.

663.—*Se llama paralelipípedo un prisma A c* (fig. 307), *que tiene por base un paralelógramo.*

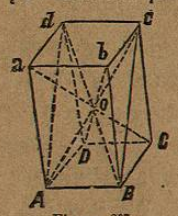

Figura 307.

En este cuerpo las caras opuestas son paralelógramos iguales y paralelos. En efecto, en todo prisma las bases A C y a c son iguales y paralelas; pero por ser paralelipípedo el sólido, serán paralelógramos. Las caras laterales son paralelógramos, y para persuadirse de que son iguales y paralelas por ej. las caras A b y D c, basta observar que los lados del ángulo A B b son respectivamente iguales, y paralelos á los del D C c (446). Lo mismo se verifica con las caras B c y A d por razón del paralelismo é igualdad de las rectas de los ángulos b B C y a A D.

Recíprocamente, *todo cuerpo compuesto de seis caras paralelas de dos en dos, es paralelipípedo.*

Por ser a c paralela á A C, será la recta a b paralela A B. Por ser B c paralela á A d, será B b, paralela á a A; luego la cara A b será paralelógramo; pudiendo demostrarse igualmente que lo son todas las demás.