*Se llama zona la parte de la superficie de la esfera* P D G N *comprendida entre dos circunferencias, cuyos planos son paralelos.*

*Se llama casquete esférico, ó zona de una base, la parte de la superficie de la esfera* P N A *limitada por una circunferencia* P N.

682.—Se llama *plano tangente á la esfera el que, como* M [fig. 320], *no tiene más que un punto* B *de contacto con ella.*

Como toda recta diversa de C B, tirada del centro de la esfera al plano, tiene que ser mayor que su radio, resulta que el radio C B es la menor distancia del centro al plano, y por consiguiente le es perpendicular. Recíprocamente, todo plano M perpendicular al extremo de un radio C B será tangente á la esfera, porque debiendo ser cualquiera oblícua mayor que la perpendicular C B, el plano M no podrá tener más que el punto B de contacto con la esfera.

Si se hace girar un círculo y su tangente B E al rededor del diámetro A B perpendicular á la tangente, se engendrará la esfera y un plano tangente en el punto B, porque este plano M es perpendicular al radio C B.

683.—*Cuando un polígono regular* A B C.... [fig. 321] *gira al rededor del diámetro* A O *del círculo inscrito, engendra una superficie que tiene por medida el producto de la circunferencia del círculo inscrito por la proyección de la parte del perímetro que se considera sobre el eje* A O *de revolución.*

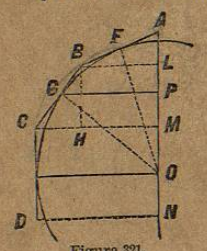

Figura 321.

Para demostrar este principio en toda su generalidad, considerarémos tres casos: 1°, la superficie de un cilindro engendrada por una porción C D del polígono paralela al eje A O; 2°, la superficie de un trozo de cono engendrada por el lado B C, y 3°, la superficie de un cono engendrada por el lado A B.

1° La superficie del cilindro originado por la rotación de C D tiene por valor (672): circf. D N×C D y sustituyendo sus iguales: circunferencia G O×M N, que es lo que expresa el principio que venimos demostrando.

2° La superficie de trozo de cono engendrado por la rotación de B C al rededor del eje tiene por media (680):

C B circf. G P....(1)

Comparando los triángulos C B H y G O P que son semejantes por tener sus lados perpendiculares, se tiene:



C B : B H :: G O : G P

G O : G P :: circf. G O : circf. G P

luego C B : L M :: circf. G O : circf. G P

formando el producto de extremos y medios.

C B×circf. G P=circf. G O×L M

y como el primer miembro de esta ecuación es la área lateral del trozo de cono, se ve que ésta según lo expresado en el segundo miembro tiene por valor igualmente lo que indica el principio que venimos demostrando.

3° La superficie del cono engendrado por la rotación de A B al rededor del eje tiene por valor [679]:

$\frac{1}{2}$ circf. B L×A B....[2]

Comparando los triángulos A B L y A O F que son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo A B L=A O F cuyos lados son perpendiculares, se tiene:

A L : A F :: B L : F O

B L : F O :: circf. B L : circf. F O

luego: A L : A F :: circf. B L : circf. F O

formando el producto de los medios y de los extremos

circf. B L×A F=circf. F O×A L

sustituyendo circf. B L×$\frac{1}{2}$ A B=circf. G O×A L

Expresando el primer miembro la área del cono, se ve que tiene por valor igualmente lo que indica el segundo miembro de la ecuación, que es la expresión algebráica del teorema que venimos demostrando.

En consecuencia, cualquiera que sea la posición del lado del polígono generador de la superficie, ésta tendrá por medida lo que expresa el teorema que hemos demostrado.

684.—Cuando el polígono regular tiene un número infinito de lados, la superficie que engendra es la de una esfera, y por medio del principio del párrafo anterior, podrémos determinar la área de este cuerpo y la de sus diversas partes.

Si llamamos R el radio de la esfera, y la altura s p de la zona P D G N [fig. 320] la representamos por h, tendrémos:

De lo que resulta: 1° que la área de la esfera es igual á la lateral del cilindro circunscrito; 2° que es los dos tercios de la total del mismo cilindro; 3° que es los cuatro novenos de la total del cono circunscrito: y 4° que la área total del cilindro es media proporcional entre la de la esfera y la del cono, supuesto que

$$6\,\pi\,R^2=\sqrt{4\,\pi\,R^2\times 9\,\pi\,R^2}$$

686.—*Las áreas de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Llamemos s, s', s"... las áreas de las caras de un poliedro, y S, S' S"... las de su semejante: l, l', l"..... las líneas del primer poliedro, y L, L', L"..... las líneas homólogas en el segundo. Se tiene, [579] por ser semejantes las caras:

$$s : S :: l^2 : L^2 \qquad s' : S' :: l'^2 : L'^2 \text{ etc.}$$

$$l : L :: l' : L' :: l'' : L''....$$

elevando al cuadrado $\quad l^2 : L^2 :: L'^2 :: l''^2 : L''^2....$

luego $\quad s : S :: s' : S' :: s'' : S''..... :: l^2 : L^2$

y como la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á un consecuente [318—8°] resulta:

$$s+s'+s''.... : S+S'+S''+ .... :: l^2 : L^2$$

que es lo que se quería demostrar.

*Las áreas de dos cilindros engendrados por rectángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas y á los cuadrados de sus radios.*

Si representamos por s y S las áreas laterales de los cilindros, por r y R los radios de sus bases, y por h y H sus respectivas alturas. Como los rectángulos generadores tienen por lados los radios y las alturas, y por el supuesto son semejantes, tendrémos:

$$h : H :: r : R$$

por otra parte $\quad s : S :: 2\,\pi\,r\,h : 2\,\pi\,R\,H....[1]$

multiplicando ordenadamente, y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$



elevando al cuadrado los términos de la proporción

$$h : H :: r : R$$

se tiene: $\quad h^2 : H^2 :: r^2 : R^2$

luego $\quad s : S :: h^2 : H^2$

que es lo que se debía demostrar.

*Las áreas laterales de los conos engendrados por triángulos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus generatrices y á los cuadrados de sus radios.*

Representando por s y S las áreas laterales de los conos, por a y A sus respectivas generatrices, y por r y R los radios de sus bases: siendo los triángulos generadores semejantes, cuyas hipotenusas y catetos homólogos son a, A y r, R, se tiene:

$$a : A :: r : R$$

por otra parte (679) $\quad s : S :: \pi\,r\,a : \pi\,R\,A$

multiplicando ordenadamente estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2$$

elevando al cuadrado los términos de la 1ª proporción, se tiene:

$$a^2 : A^2 :: r^2 : R^2$$

se deduce que $\quad s : S :: a^2 : A^2$

*Las áreas de las esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios y á los cuadrados de sus diámetros.*

Siendo la área de la esfera $= 4\,\pi\,R^2 = \pi\,D^2$, (684) si representamos por s y S las áreas de las esferas, por r y R sus radios, y por d y D sus respectivos diámetros, se tiene:

$$s : S :: 4\,\pi\,r^2 : 4\,\pi\,R^2 :: \pi\,d^2 : \pi\,D^2$$

y suprimiendo los factores comunes resulta:

$$s : S :: r^2 : R^2 :: d^2 : D^2$$

687.—Problemas.—I.—*Determinar la superficie lateral de un prisma recto de base pentagonal, cuyo lado es de 8 centímetros y su arista tiene tres metros y medio.*

Siendo necesario para poder valuar una superficie expresar las dimensiones lineales en la misma unidad, comenzarémos por expresar las dimensiones del prisma en metros ó en centímetros. Adoptando la primera, tendrémos que el perímetro de la base será $= \overset{m}{0'08} \times 5 = \overset{m}{0'40}$.

La arista del prisma $= \overset{m}{3'50}$, y por último, la área lateral será

$$s = \overset{m}{0'40} \times 3'50 = \overset{m\,cd.}{1'40}$$

un metro cuadrado y 40 centésimos de metro cuadrado.

Si hubiésemos adoptado por unidad lineal el centímetro, la superficie la habríamos obtenido en centímetros cuadrados, é igual 14000 centímetros cuadrados.

II.—*Se quiere determinar el lado de un cubo cuya diagonal mide* $\overset{m}{5'1962}$.

Si llamamos l el lado del cubo y d su diagonal, hemos visto (668) que

$$d^2 = 3\,l^2$$

despejando á l y sustituyendo por d su valor, se tiene:

$$l = \sqrt{\frac{5'1962^2}{3}} = 3 \text{ metros próximamente.}$$

III.—*Determinar la área total de un cilindro recto, cuya altura es de* $\overset{m}{1'8}$ *y el radio de su base de* $\overset{m}{0'6}$.

La fórmula correspondiente (673) es:

$$s = 2\,\pi\,r\,(h + r)$$

sustituyendo los valores del problema

$$s = 2 \times 3'141593 \times \overset{m}{0'6} \times \overset{m}{2'4} = \overset{m\,cd.}{9'04778784}$$

IV.—*Determinar la superficie lateral de una pirámide exagonal recta y regular, en la que el lado de la base es de 3 pulgadas y su apotema tiene 11 pulgadas.*

El perímetro de la base será $3 \times 6 = 18$ pulgadas, y la área lateral (676) es:

$$s = \tfrac{1}{2}\,p.\,A = \tfrac{1}{2}\,18 \times 11 = 99 \text{ pulgadas cuadradas.}$$

V.—*Determinar la superficie lateral de un trozo de pirámide regular*



*cuadrangular, en la que los lados de las bases son* $2\frac{1}{2}$ *pies y* 2 *pies, y la altura de uno de los trapecios que le sirve de cara* 1 *pie y* 9 *pulgadas.*

El perímetro de la base inferior será $2\frac{1}{2} \times 4 = 10$ pies.

El perímetro de la base superior $2 \times 4 = 8$ pies.

La área lateral del trozo será $= \frac{1}{2}\,(10 + 8)\,1'75 = 15'75$ pies cuadrados.

VI.—*Determinar la superficie total de un cono recto cuya generatriz es de* $\overset{m}{11'25}$ *y el radio de su base* $\overset{m}{4'72}$.

La fórmula correspondiente (679) es:

$$S = \pi\,r\,(A + r)$$

sustituyendo $\quad S = 3'141593 \times 4'72 \times 15'97 = \overset{m\,cd.}{236'808}$

VII.—*Calcular la superficie de una zona glacial de la tierra, que es un casquete esférico cuya altura aproximada es de* 526'6 *kilómetros y el radio de la esfera* 6367 *kilómetros.*

La fórmula correspondiente (684) es:

$$s = 2\,\pi\,R\,a$$

sustituyendo $\quad s = 2 \times 3'141593 \times \overset{kilóms.}{6367} \times \overset{kilóms.}{526'6}$
$\quad = 21\ 066\ 657$ kilómetros cuadrados.

VIII.—*Determinar la superficie de una de las zonas templadas de la tierra, siendo su altura* 3 305 *kilómetros, y el radio de la esfera* 6 367 *kilómetros.*

La fórmula respectiva (684) es:

$$s = 2\,\pi\,R\,h$$

sustituyendo $\quad s = 2 \times 3'141593 \times 6367 \times 3305$
próximamente $\quad = 132\ 216\ 674$ kilómetros cuadrados ó miriaras.

IX.—*Dado el radio de una esfera, que es de* 6 367 *kilómetros, determinar su superficie.*

Para resolver este problema harémos uso de la fórmula:

$$S = 4\,\pi\,R^2 \quad (684)$$

sustituyendo $\quad S = 4 \times 3'141593 \times 6\,367^2$
próximamente $\quad = 509\ 424\ 070$ kilómetros cuadrados.

X.—*Se quiere determinar el diámetro de una esfera cuya superficie es de 282 743'37 metros cuadrados.*

Si de la fórmula (684)

$$s = \pi D^2$$

despejamos á D y sustituimos: $D = \sqrt{\frac{282743'37}{3'141593}} = 300$ metros.

---

## Volumen de los cuerpos.

688.—*Volumen es la extensión en sus tres dimensiones, longitud, latitud y grueso.*

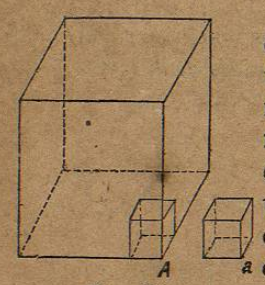

Figura 323.

El volumen de un cuerpo es la extensión comprendida entre las superficies que lo limitan. Así como la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud á la de otra línea tomada por unidad y determinando el número de veces que está contenida en ella, para valuar un volumen es necesario averiguar cuántas veces contiene á la unidad de volumen. Al explicar el sistema de pesos y medidas (182 y 185) dijimos que la unidad de volumen es el *cubo*, que tiene la unidad lineal por lado. Así, por ejemplo, si el cubo a (figura 323) representa la unidad de volumen, y quisiéramos determinar el volumen del cuerpo A, tendríamos que averiguar cuántas veces el primer cubo cabe en el segundo. En la figura de que nos servimos, pueden colocarse en la base del cubo A 16 cubos iguales á a, y cabiendo 4 hiladas, una encima de otra, de 16 cubos, diríamos que el volumen del cuerpo A es de 64 medios centímetros cúbicos; porque es el medio centímetro cúbico el volumen que en este caso hemos tomado por unidad. La medida ó valuación de volúmenes raras veces puede hacerse si no es valiéndose de métodos indirectos.



*Cuerpos equivalentes en volumen son los que tienen volúmenes iguales.* Así, por ejemplo, un paralelipípedo, en el que quepan 64 cubos iguales á a, será equivalente á A, sin ser igual ni aun semejante á este cuerpo.

689.—*Dos paralelipípedos de la misma base é igual altura, son equivalentes en volumen.*

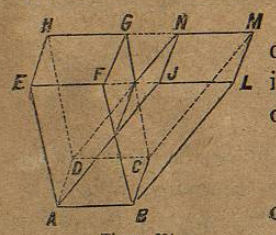

Figura 324.

Siendo las bases iguales, se podrán hacer coincidir como en la figura 324, en A C, y por ser iguales las alturas, las caras opuestas E G y J M quedarán en el mismo plano H L paralelo á A C.

Esto supuesto, pueden ocurrir dos casos:

1º Cuando quedan en un mismo plano las caras A F y A L de los dos prismas, los triángulos E A J y F B L son iguales por tener iguales los ángulos en A y en B, formados por lados respectivamente iguales como lados opuestos de paralelógramos. Ahora bien: los prismas E A J H y F B L G, que tienen los expresados triángulos E A J y F B L por bases, son sobreponibles por tener todos sus elementos iguales, y si del sólido total B D H L se quitan sucesivamente los prismas triangulares iguales E A J H y F B L G, nos quedarán los paralelipípedos B D N L y B D H F, que serán equivalentes.

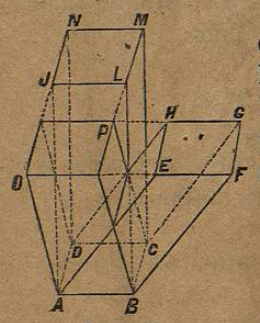

Figura 325.

2º Cuando no quedan en el mismo plano las caras A F y A L (fig. 325), si prolongamos los lados de las bases superiores E F, G H, J N y L M, por sus respectivas intersecciones se formará el paralelógramo O P igual á ellas, y por consiguiente igual á la base común A C. Si unimos los vértices de O P con los de la base A C, se formará un nuevo paralelipípedo A P que por hallarse en las circunstancias del 1er. caso con los paralelipípedos A G y A M, será equivalente á cada uno de ellos; luego estos paralelipípedos A G y A M serán también equivalentes entre sí.

690.—*Un paralelipípedo cualquiera puede transformarse en otro rectangular recto que sea equivalente á él.*

Imaginemos un paralelipípedo oblícuo que tenga por base A B C D (fig. 326) y por altura G B, el cual no lo hemos representado por evitar confusiones, y si en los vértices de la base A B C D del paralelipípedo

área de la zona esférica$=s=2\pi R.\ h$

En el casquete esférico si representamos por $a$ su altura s A, tendrémos:

área del casquete esférico$=s=2\pi R.\ a$

Como la área de la esfera es la suma de las áreas de las diversas zonas y casquetes que la forman, y la suma de las proyecciones de todas las partes del semicírculo generador sobre el eje es el diámetro, resulta que

la área de la esfera $S=2\pi R.\ 2R=4\pi R^2$

luego la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos.

Si por R ponemos su valor $\frac{D}{2}$, llamando D al diámetro, tendrémos por expresión del área de la esfera.

$$S=\pi D^2$$

Se llama *huso á la porción de la superficie de la esfera* A O B H A [fig. 320] *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro* A B. Si desde el centro C de la esfera se tiran los radios C O y C H perpendiculares al diámetro común A B, *el ángulo* O C H, que mide el ángulo diedro de los dos semicírculos que limitan el huso, *se llama ángulo del huso.*

Si el arco O H, medida del ángulo del huso, se divide en dos partes iguales y por el punto de división se tira un semicírculo que pase por A B, resultará un huso que será la mitad del primero por ser sobreponibles las porciones de la esfera de que están formados. Si el arco O H se divide en tres, cuatro ó más partes iguales, el huso quedará dividido igualmente en tres, cuatro ó más partes iguales entre sí. En consecuencia, *las superficies de los husos son proporcionales á sus ángulos, ó á los arcos que los miden.*

Si comparamos la superficie del huso con la de la esfera, tendrémos: sup. huso A O B H : sup. esfera :: arco O H : circf. círc. máximo luego, *la superficie de un uso es igual á la de la esfera multiplicada por la relación que existe entre el número de grados del ángulo del huso y 360°.*



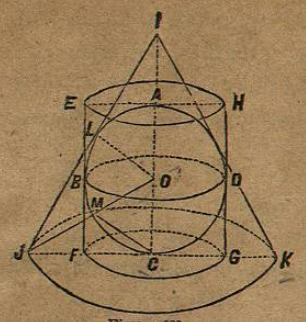

Figura 322.

685.—Si al círculo A B C D [fig. 322] circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K y suponemos que este sistema gira al rededor del eje I A C, resultará una esfera inscrita á un cilindro y á un cono, y vamos á determinar la relación que existe entre la superficie de la esfera y las del cilindro y del cono circunscritos á ella.

Llamando R el radio B O de la esfera, hemos visto ya que:

1° el área de la esfera$=S=4\pi R^2$.
Respecto al cilindro [672] tenemos:
2° área lateral del cilindro$=S'=2\pi R\times 2R=4\pi R^2$
3° área total del cilindro$=S''=4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2$. [673]

Para determinar la área del cono vamos á comenzar por expresar en función del radio de la esfera el radio de su base J C, que por razón del triángulo equilátero es la mitad de su lado I J. Siendo equilátero el triángulo que engendra el cono, el ángulo I J K vale 60° [465], y como los triángulos O L J y O C J son iguales, el ángulo O J C vale 30°, y el J O C, que es su complemento valdrá 60°. Tirando la cuerda C M, ésta será igual al radio [497], y nos resulta el triángulo equilátero O M C en el que el ángulo O C M=60°. Si del ángulo recto O C J se resta el O C M, queda el ángulo M C J=30°. De consiguiente el triángulo M C J será isósceles, por tener iguales los ángulos M J C y M C J, y por tanto M J=M C=R. Por último se tendrá, J O=2 R.

Considerando el triángulo rectángulo J O C, se tiene:

$$JC^2=JO^2-OC^2$$

y sustituyendo $JC^2=4R^2-R^2=3R^2$

por otra parte $2\,JC=JK=JI$

Ahora bien: la área total del cono [679] es$=\pi r\,[A+r]$

$$S'''=\pi\,JC\,[2\,JC+JC]=3\pi\,JC^2$$

y sustituyendo $S'''=9\pi R^2$

En resúmen: el área de la esfera $=4\pi R^2$
la lateral del cilindro $=4\pi R^2$
la total del cilindro $=6\pi R^2$
y la total del cono $=9\pi R^2$