X.—*Se quiere determinar el diámetro de una esfera cuya superficie es de 282 743'37 metros cuadrados.*

Si de la fórmula (684)

$$s = \pi D^2$$

despejamos á D y sustituimos: $D = \sqrt{\frac{282743'37}{3'141593}} = 300$ metros.

Volumen de los cuerpos.

688.—*Volumen es la extensión en sus tres dimensiones, longitud, latitud y grueso.*

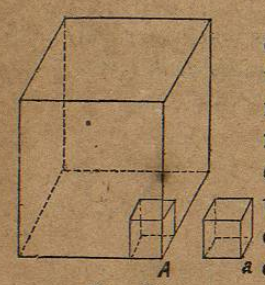

Figura 323.

El volumen de un cuerpo es la extensión comprendida entre las superficies que lo limitan. Así como la medida de una línea se obtiene refiriendo su longitud á la de otra línea tomada por unidad y determinando el número de veces que está contenida en ella, para valuar un volumen es necesario averiguar cuántas veces contiene á la unidad de volumen. Al explicar el sistema de pesos y medidas (182 y 185) dijimos que la unidad de volumen es el *cubo*, que tiene la unidad lineal por lado. Así, por ejemplo, si el cubo a (figura 323) representa la unidad de volumen, y quisiéramos determinar el volumen del cuerpo A, tendríamos que averiguar cuántas veces el primer cubo cabe en el segundo. En la figura de que nos servimos, pueden colocarse en la base del cubo A 16 cubos iguales á a, y cabiendo 4 hiladas, una encima de otra, de 16 cubos, diríamos que el volumen del cuerpo A es de 64 medios centímetros cúbicos; porque es el medio centímetro cúbico el volumen que en este caso hemos tomado por unidad. La medida ó valuación de volúmenes raras veces puede hacerse si no es valiéndose de métodos indirectos.

Cuerpos equivalentes en volumen son los que tienen volúmenes iguales. Así, por ejemplo, un paralelipípedo, en el que quepan 64 cubos iguales á a, será equivalente á A, sin ser igual ni aun semejante á este cuerpo.

689.—*Dos paralelipípedos de la misma base é igual altura, son equivalentes en volumen.*

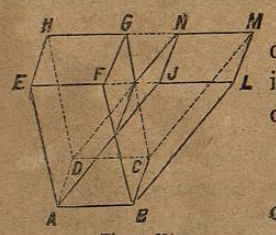

Figura 324.

Siendo las bases iguales, se podrán hacer coincidir como en la figura 324, en A C, y por ser iguales las alturas, las caras opuestas E G y J M quedarán en el mismo plano H L paralelo á A C.

Esto supuesto, pueden ocurrir dos casos:

1º Cuando quedan en un mismo plano las caras A F y A L de los dos prismas, los triángulos E A J y F B L son iguales por tener iguales los ángulos en A y en B, formados por lados respectivamente iguales como lados opuestos de paralelógramos. Ahora bien: los prismas E A J H y F B L G, que tienen los expresados triángulos E A J y F B L por bases, son sobreponibles por tener todos sus elementos iguales, y si del sólido total B D H L se quitan sucesivamente los prismas triangulares iguales E A J H y F B L G, nos quedarán los paralelipípedos B D N L y B D H F, que serán equivalentes.

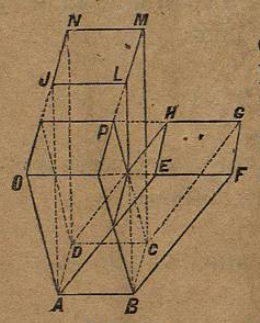

Figura 325.

2º Cuando no quedan en el mismo plano las caras A F y A L (fig. 325), si prolongamos los lados de las bases superiores E F, G H, J N y L M, por sus respectivas intersecciones se formará el paralelógramo O P igual á ellas, y por consiguiente igual á la base común A C. Si unimos los vértices de O P con los de la base A C, se formará un nuevo paralelipípedo A P que por hallarse en las circunstancias del 1er. caso con los paralelipípedos A G y A M, será equivalente á cada uno de ellos; luego estos paralelipípedos A G y A M serán también equivalentes entre sí.

690.—*Un paralelipípedo cualquiera puede transformarse en otro rectangular recto que sea equivalente á él.*

Imaginemos un paralelipípedo oblícuo que tenga por base A B C D (fig. 326) y por altura G B, el cual no lo hemos representado por evitar confusiones, y si en los vértices de la base A B C D del paralelipípedo

triángulo. Ahora bien, como el volumen del paralelipípedo tiene por expresión el producto de la superficie del paralelógramo de su base por su altura, el volumen del prisma triangular será igual á la mitad de esta expresión; ó lo que es lo mismo, al producto de la superficie del triángulo que le sirve de base por la altura del prisma.

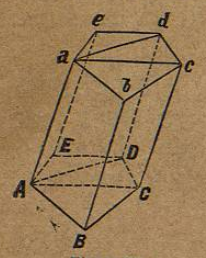

Figura 332.

4° Si la base del prisma es un polígono, podemos descomponerlo en prismas triangulares, haciendo pasar planos por una de sus aristas laterales A a (figura 332) y todas las opuestas. Siendo el volumen del prisma poligonal A c la suma de los prismas triangulares en que ha quedado descompuesto, si representamos por V el volumen total, y por v, v', v'' los volumenes respectivos de los prismas triangulares, tendrémos:

$$V = v + v' + v''$$

Por otra parte, el volumen de cada prisma triangular tiene por valor el producto de su base por su altura. Así es que si observamos que las alturas de todos los prismas parciales son iguales á la del prisma total, en razón de ser paralelas las bases A C y a c, representando por a esta altura común y sustituyendo en la ecuación anterior, resulta:

$$V = ABC \times a + ACD \times a + ADE \times a$$

y sacando á a como factor común y reemplazando la suma de los triángulos por el polígono que forman, se tiene:

$$V = ABCDE \times a$$

que es lo que debíamos demostrar.

699.—*El volumen de un cilindro recto ú oblícuo, tiene por valor el producto de la área de su base por su altura.*

Supuesto que un cilindro no es más que un prisma cuya base es un polígono regular de una infinidad de lados. Si representamos por v el volumen del cilindro, por r el radio de su base, y por h su altura, tendrémos como expresión del

volumen del cilindro $\qquad v = \pi r^2 h$

700.—Si llamamos P el volumen de un prisma cuya base es B y A su altura; y representamos por p el volumen de otro prisma cuya base sea b y a su altura, tendrémos;

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

luego *los volúmenes de dos prismas cualesquiera son proporcionales á los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Si las bases son iguales, esto es, si B=b los volúmenes de los prismas serán proporcionales á sus alturas; y si por el contrario, las alturas son iguales, sus volumenes serán proporcionales á sus bases.

701.—*El volumen de un tetraedro D A B C* (fig. 333) *es la tercera parte del de un prisma A B C F D E de la misma base y altura que él.*

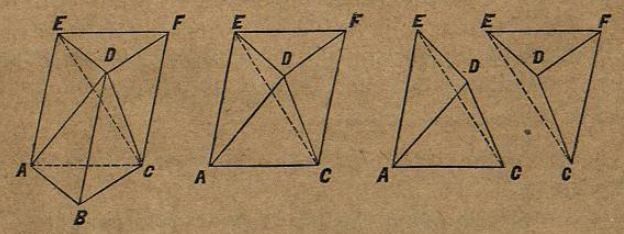

Figura 333.

Sobre la base A B C de nuestro tetraedro, levantemos aristas iguales y paralelas á D B, y haciendo pasar un plano E D F por sus extremos superiores, se formará el prisma A B C E D F de la misma base y altura que el tetraedro. Si quitamos éste nos quedará la pirámide cuadrangular D A C F E, que para mayor claridad hemos representado en la figura 2ª. En esta pirámide el plano D C E la divide en dos tetraedros, representados por separado en las figuras 3ª y 4ª, de los que el C D E F es equivalente tanto al D A B C como al D A C E. En efecto, C D E F es equivalente á D A B C por tener sus bases E D F y A B C iguales (658) y la misma altura, que es la distancia de las bases del prisma. El mismo tetraedro D C E F es equivalente al D A C E porque sus bases E C F y A C E son triángulos iguales y tienen la misma altura, que es la distancia de D á la cara A C F E. Luego siendo equivalentes entre sí los tres tetraedros en que hemos dividido el prisma, el volumen de uno de ellos D A B C será la tercera parte del del prisma, *esto es, el volumen de un tetraedro tiene por medida la tercera parte del producto de su base por su altura.*

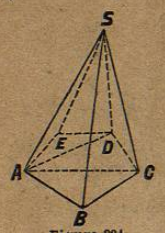

Figura 334.

702.—Haciendo pasar planos por las aristas de una pirámide S A B C.... [fig. 334] puede descomponerse en tetraedros, que tienen la misma altura que la pirámide. El volumen de la pirámide es la suma de los volúmenes de los tetraedros, así como su base es la suma de los triángulos que sirven respectivamente de bases á los tetraedros, y como el volúmen de cada tetraedro tiene por valor la tercera parte del producto de su base

por su altura, se infiere que el *volumen de una pirámide cualquiera tiene por medida la tercera parte del producto de su base por su allura.*

703.—Como el cono es una pirámide de base circular, *el volumen del cono recto ú oblícuo tiene por valor la tercera parte del producto de su base por su altura.*

Si representamos por v el volumen del cono, por r el radio de su base y por h su altura, tendrémos como expresión del volumen del cono:

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

704.—El volumen de un poliedro cualquiera se obtiene descomponiéndolo en pirámides y valuando en seguida el volumen de éstas: su suma dará el volumen del poliedro.

705.—*Las pirámides de igual altura y de bases equivalentes, tienen el mismo volumen.*

Supuesto que el volumen de las pirámides tendrá por valor la tercera parte del producto de factores iguales.

706.—*El volumen de un trozo de prisma triangular* A B C F D E [fig. 335] *tiene por valor la tercera parte del producto de su base* A B C *por la suma de las distancias de los tres vértices* D, E *y* F *á la misma base.*

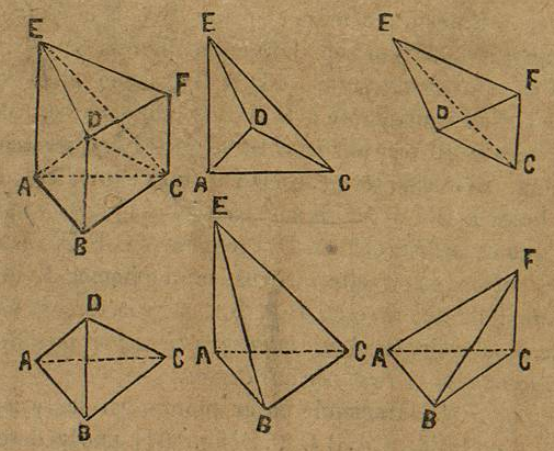

Figura 335.

Si el prisma truncado A B F lo cortamos con el plano D A C nos resultará por una parte el tetraedro D A B C, que hemos representado en la figura 1ª de abajo, y la pirámide cuadrangular D A C F E. Esta pirámide cuadrangular, cortada por el plano D C E, se descompone en los tetraedros D C A E y D C F E. Así es que el volumen del trozo se-

rá la suma de los volúmenes de los tres tetraedros D A B C, D C A E y D C F E. El primer tetraedro de la figura 1ª tiene por base la del trozo A B C, y por altura la distancia del vértice opuesto D á esta misma base, y su volumen será el tercio del producto de estas dos cantidades, lo cual está conforme con el enunciado del teorema que venimos demostrando. El segundo tetraedro D C A E es equivalente al E B C A representado en la figura 2ª de abajo, que resultaría haciendo pasar un plano por los vértices E B C del trozo de prisma, porque tiene la misma base C A E é igual altura por ser la arista B D paralela á la cara A F. El tercer tetraedro D C F E es equivalente al B C F A, representado en la figura 3ª de abajo, que resultaría al cortar el trozo por un plano que pasara por los vértices F, A y B, porque tienen bases equivalentes y la misma altura. Los triángulos C F E y C F A que sirven de bases á estos tetraedros son equivalentes, porque tienen la misma base C F, y por altura la distancia de las dos aristas paralelas C F y A E. Las alturas de los tetraedros D C F E y B C F A son iguales, porque la arista D B es paralela á la cara A F del trozo. En último análisis, el volumen del trozo A F es equivalente á la suma de los volúmenes de los tetraedros de las figuras 1ª, 2ª y 3ª de abajo, que tienen por base la del trozo A B C y por alturas respectivamente las distancias de los vértices opuestos D, E y F á esta base, luego el volumen del prisma truncado tendrá por valor lo que expresa el teorema.

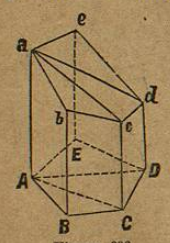

Figura 336.

707.—*El volumen de un prisma truncado* A d [figura 336] *de base cualquiera, tiene por valor la suma de los volúmenes de los trozos de los prismas triangulares* A B C a, A C D a, *y* A D E a *en que se puede descomponer haciendo pasar planos por una arista* A a *y las opuestas* C c, D d.

708.—*El volumen de un trozo de pirámide de bases paralelas, es igual á la tercera parte del producto de la altura del trozo por la suma de la base inferior, más la superior, más una media proporcional entre ambas.*

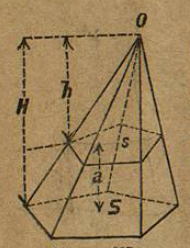

Figura 337.

Llamemos S la base inferior del trozo [fig. 337], s su base superior y a su altura. Completando la pirámide de que forma parte del trozo, llamarémos: V el volumen de la pirámide total O S, y H su altura: v el volumen de la pirámide superior O s y h su altura. El volumen del trozo que representarémos por T, será igual V—v. Esto supuesto tendrémos:

$$V=\tfrac{1}{3}\,S\,H,\qquad v=\tfrac{1}{3}\,s\,h,\qquad V-v=\tfrac{1}{3}\,S\,H-\tfrac{1}{3}\,s\,h$$

Como $H=a+h$ sustituyendo en el último valor

$$V-v=T=\tfrac{1}{3}\,S\,[a+h]-\tfrac{1}{3}\,s\,h$$

ejecutando la multiplicación $T=\tfrac{1}{3}\Big(S\,a+h\,(S-s)\Big)$..... (1)

Vamos á determinar el valor de h en función de a, S y de s para sustituïrlo en esta ecuación. Conforme á lo demostrado en el número 644, se tiene:

$$S : s :: H^2 : h^2$$

extrayendo raíz y sustituyendo

$$\sqrt{S} : \sqrt{s} :: a+h : h$$

formando é igualando el producto de extremos y medios,

$$h\sqrt{S}=a\sqrt{s}+h\sqrt{s}$$

despejando á $h=\dfrac{a\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}$.... [2]

sustituyendo este valor en la ecuación [1]

$$T=\tfrac{1}{3}\left(S\,a+\frac{a\sqrt{s}\,[S-s]}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right)$$

sacando a como factor común, y considerando que

$S=\sqrt{S^2}$, $s=\sqrt{s^2}$ y que $S-s=(\sqrt{S}+\sqrt{s})\,(\sqrt{S}-\sqrt{s})$,(251—3°)

tendrémos:

$$T=\tfrac{1}{3}\,a\left(S+\frac{\sqrt{s}\,(\sqrt{S}+\sqrt{s})\,(\sqrt{S}-\sqrt{s})}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right)$$

y finalmente $T=\tfrac{1}{3}\,a\,(S+s+\sqrt{S\,s})$.....(3)

que es lo que teníamos que demostrar.

709.—Como el trozo de cono, lo es de una pirámide cuyas bases paralelas son círculos, llamando t su volumen y sustituyendo por S y s sus valores, se tiene:

$$t=\tfrac{1}{3}\,a\,(\pi\,R^2+\pi\,r^2+\sqrt{\pi^2\,R^2\,r^2})$$

ó $$t=\tfrac{1}{3}\,\pi\,a\,(R^2+r^2+R\,r)$$

expresión que servirá para valuar el volumen de un trozo de cono.

710.—*Un triángulo* A B C (fig. 338) *que gira al rededor de una recta cualquiera* C I *situada en su plano y que pasa por uno de sus vértices* C *engendra un volumen que tiene por valor la tercera parte del producto de la perpendicular* C D *bajada de este vértice sobre la base* A B *multiplicada por la superficie engendrada por esta base* A B.

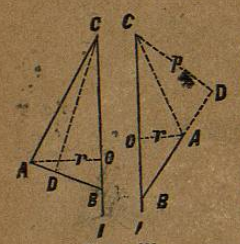

Figura 338.

Llamarémos p á la perpendicular C D bajada sobre la base A B, R á la perpendicular A O, y para simplificar dirémos vol. B A C para expresar el volumen engendrado por la rotacion del triángulo B A C al rededor de C I, y sup. A B para indicar la superficie engendrada por la rotación de la recta A B. Esto supuesto, consideraremos tres casos:

1° Cuando el triángulo C A B gira al rededor de uno de sus lados C B [fig. 338]. Se tiene:

$$\text{vol. C A B}=\text{cono C O A}+\text{cono B O A}$$

$$\text{vol. C A B}=\tfrac{1}{3}\,\pi\,R^2\,(C\,O+O\,B)=\tfrac{1}{3}\,\pi\,R\,R\times C\,B$$

$R\times C\,B$, que es el duplo de la superficie del triángulo C A B, es igual á $A\,B\times p$, y sustituyendo se tiene:

$$\text{vol C A B}=\tfrac{1}{3}\,\pi\,R.\ A\,B\times p$$

pero como π R. A B expresa la superficie cónica engendrada, por la rotación de A B [679], finalmente resulta:

$$\text{vol. C A B}=\tfrac{1}{3}\,\text{sup. A B}\times p$$

que es lo que expresa el teorema. Cualquiera que sea el valor del ángulo en A, serán aplicables los raciocinios de esta demostración.

2° Cuando el triángulo C A B [fig. 339] gira al rededor de una línea exterior C I. En este caso tendrémos:

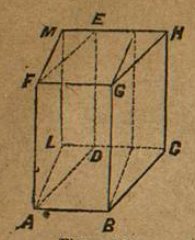

Figura 326.

dado, levantamos perpendiculares á la base, iguales á la altura del mismo paralelipípedo, se tendrá otro paralelipípedo A C H E F recto y equivalente al oblícuo que no hemos representado en la figura. En seguida levantemos en A y en B perpendiculares á A B, y sobre el rectángulo B L construirémos el paralelipípedo B M equivalente á B E, por tener ambos la misma base A G y A L por altura; luego el paralelipípedo recto y rectangular B M será equivalente al propuesto, que no se ha representado en la figura.

691.—*Dos paralelipípedos rectangulares de la misma base son proporcionales á sus alturas.*

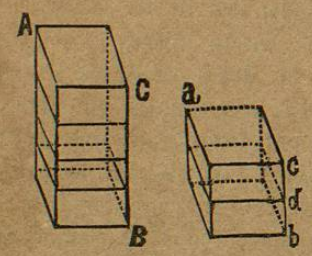

Figura 327.

Puede suceder que las alturas de los dos paralelipípedos sean conmensurables ó inconmensurables. En el primer caso si las alturas B C y b c son conmensurables de modo que dividiendo, por ejemplo, b c en dos partes iguales, la altura B C tenga cuatro de estas partes, tendrémos:

$$bc : BC :: 2bd : 4bd :: 2 : 4$$

Si por los puntos de división de las dos alturas tiramos planos paralelos á las bases, nos resultará el paralelipípedo a b dividido en dos y el A B en cuatro, todos iguales entre sí, y tendrémos:

$$ab : AB :: 2ad : 4ad :: 2 : 4$$

Siendo iguales las últimas razones, en las dos series de razones iguales las primeras también lo serán, y se tendrá por último:

$$\text{Par. } ab : \text{Par. } AB :: \text{alt. } bc : \text{alt. } BC$$

que es lo que se quería demostrar.

Si las alturas fueran inconmensurables, repitiendo el raciocinio que hicimos al fin del párrafo 557 demostraríamos en este caso la verdad del teorema.

692.—*Los volúmenes de dos paralelipípedos* A P *y* A p (fig. 328) *rectangulares de la misma altura, son proporcionales á las superficies de sus bases* B P *y* B p.

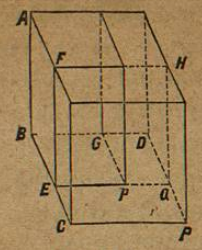

Figura 328.

Siendo rectangulares los paralelipípedos, puede hacerse coincidir uno de sus triedros B y el plano de sus bases. Prolonguemos la cara F p hasta Q H, y nos resultará un nuevo paralelipípedo A Q. Llamarémos P al paralelipípedo A P, p al A p, y Q al A Q. Comparando P con Q, que tienen la misma base A D, se tiene (691):

$$P : Q :: BC : BE$$

Comparando Q con p, que tienen la misma base B F, se tiene:

$$Q : p :: BD : BG$$

multiplicando ordenadamente estas proporciones, resulta:

$$P : p :: BC \times BD : BE \times BG$$

que es lo que se quería demostrar.

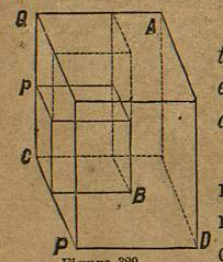

Figura 329.

693.—*Los volúmenes de dos paralelipípedos rectangulares cualesquiera* A P *y* B p (fig. 329), *son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Si prolongamos las caras del paralelipípedo B p, nos resultará uno nuevo B Q. Llamando P al paralelipípedo A P, p al B p, y Q al B Q, tendrémos, comparando P con Q, que tienen la misma altura:

$$P : Q :: \text{base } CD : \text{base } CB$$

Comparando Q con p, que tienen la misma base, se tendrá:

$$Q : p :: CQ : Cp$$

multiplicando las proporciones, resulta:

$$P : p :: \text{base } CD \times CQ : \text{base } CB \times Cp$$

que es lo que se debía demostrar.

694.—Si en la última proporción p nos representa un cubo que se tome como unidad de volumen, sus lados serán iguales á la unidad de longitud y la expresada proporción se cambiará en

$$P : 1 :: \text{base } CD \times CQ : 1 \times 1$$

luego $\quad P = \text{base } CD \times CQ$

Esto es, *cuando se toma por unidad de volumen el cubo que tiene por lado la unidad lineal, el volumen de un paralelipípedo rectangular recto tiene por valor el producto de su base por su altura;* pero debe tenerse presente que las cantidades que forman la última ecuación son números abstractos que representan relaciones con la unidad respectiva. P representa el número de veces que el paralelipípedo que se considera contiene al cubo que se ha tomado por unidad, y expresará metros cúbicos, varas cúbicas, pulgadas cúbicas, según que sus dimensiones se hayan estimado respectivamente en metros, en varas ó en pulgadas. La base C D expresará el número de veces que la unidad superficial está contenida en ella; y por último, la altura C Q expresará el número de veces que la unidad lineal está contenida en dicha altura. Además, el número P que representa el volumen, tiene que estar indicado en la unidad de volumen correspondiente á la lineal que ha servido para estimar las dimensiones del paralelipípedo. Por ejemplo, si éstas se han tomado en metros, el volumen resultará valuado en metros cúbicos; si se han tomado en decímetros, el volumen resultará en litros; si se han tomado en pies, el volumen resultará en pies cúbicos, etc.

Siendo el *cubo* un paralelipípedo recto cuyos lados son iguales, *su volumen tiene por valor la 3ª potencia de uno de sus lados.* De aquí la denominación de cubo á la 3ª potencia.

Como el volumen de un paralelipípedo oblícuo es equivalente al de uno recto rectangular de la misma altura y de base equivalente (690), resulta: que *el volumen de un paralelipípedo cualquiera tiene por valor el producto de su base por su altura.*

695.—*Un prisma oblícuo A D* (fig. 330), *es equivalente á otro recto O p cuya generatriz P p=B D y su base O P es la proyección de la A B del primero.*

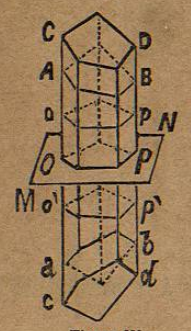

Figura 330.

Prolonguemos las aristas C A, B D.... tiremos el plano M N perpendicular á estas aristas, tomemos P p = B D y hagamos pasar el plano o p paralelo á M N. De este modo resulta el prisma recto O p cuya generatriz es igual á la de A D, y su base O P es la proyección de la base A B. Vamos á demostrar que los prismas A D y O p son equivalentes.

Si consideramos los prismas truncados o D y O B, verémos que son iguales, pues por una parte sus bases O P y o p lo son como bases de un mismo prisma O p, y por otra sus aristas respectivas también lo son, esto es, P B = p D, O A = o C, etc. En efecto, por construcción P p=B D agregando á estas rectas la parte p B resulta P B=p D,

y lo mismo con las demás aristas. Ahora bien, si de los prismas truncados O B y o D se quita la parte común o B, resulta: prisma recto O p = al oblícuo A D; que es lo que teníamos que demostrar.

696.—*Los prismas simétricos A D y* a d (fig. 330) *son equivalentes.*

Para que el prisma a d sea simétrico á A D, se necesita que las rectas D d, C c.... sean perpendiculares al plano M N, y además que D P = d P, O C = O c, P B = P b, O A = O a ...

Tomemos P p=P p'=D B y hagamos pasar por p y p' planos paralelos á M N. Nos resultarán los prismas O p y O p' iguales, por ser rectos, por tener la misma base é iguales sus generatrices. Ahora bien, O p es equivalente á A D (695), y O p' lo es á a d, luego A D y a d serán equivalentes; que es lo que se tenía que demostrar.

697.—*Un paralelipípedo cualquiera A c* (fig. 331) *está formado de dos prismas triangulares A B D b d a y C B D d b c, equivalentes entre sí.*

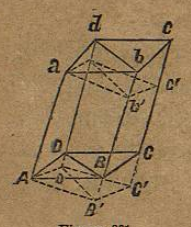

Figura 331.

Si por las diagonales d b y D B de las bases se hace pasar un plano, resultarán dos prismas triangulares A D B a y C D B c, cuyas partes constitutivas son iguales, pero que, por no estar dispuestas en el mismo orden, no serán sobreponibles. Para demostrar que los volúmenes de estos prismas son equivalentes, tiremos dos planos a c' y A C' perpendiculares á las aristas, y prolongando éstas nos resultarán el paralelipípedo recto A c' y los prismas triangulares rectos A B' O a y C' B' O c'. Estos prismas son iguales por serlo las partes de que se componen, y estar en ambos distribuidas en el mismo orden (666). Además, el prisma recto A B' O a es equivalente al oblícuo A B D b d a, porque tienen la misma generatriz A a y su base A B' O es la proyección de la A B D (695). Por igual razón, el prisma recto C' B' O c' es equivalente al C B D b d c; lúego siendo iguales los prismas rectos, serán equivalentes entre sí los prismas A B D b d a y C B D b d c, y por lo mismo equivalentes á la mitad del paralelipípedo A c.

698.—*El volumen de un prisma cualquiera tiene por valor el producto de la superficie de su base por su altura.*

1° Si el prisma es un paralelipípedo recto, hemos visto (694) que esa es la medida de su volumen.

2° Si es un paralelipípedo oblícuo, su volumen es equivalente al de uno recto de la misma altura y de base equivalente en superficie (690).

3° En el caso de que el prisma tenga por base un triángulo como A B D b d a (fig. 331), según acabamos de verlo, éste será la mitad del paralelipípedo cuya base fuera un paralelógramo A B C D doble del