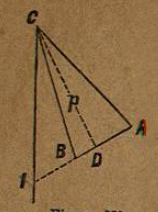

Figura 339.

vol. C A B=vol. C A I—vol. C B I

sustituyendo los valores de vol. C A I y de vol. C B I conforme á lo demostrado en el primer caso, se tiene:

vol. C A B=$\frac{1}{3}$ p. sup A I—$\frac{1}{3}$ p. sup B I

ó vol. C A B=$\frac{1}{3}$ p. [sup. A I—sup. B I]=$\frac{1}{3}$ p. sup. A B

que es lo que se tenía que demostrar.

3° Cuando la base A B [fig. 340] es paralela al eje de rotación. En este caso se tiene:

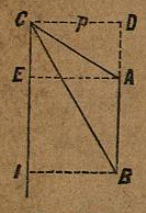

Figura 340.

vol. C A B=cilindro A B I E+cono C A E—cono C B I

sustituyendo los valores respectivos tendrémos:

vol. C A B=π p^2 E I+$\frac{1}{3}$ π p^2 C E—$\frac{1}{3}$ π p^2 C I
=π p^2 [E I+$\frac{1}{3}$ C E—$\frac{1}{3}$ C I]=$\frac{1}{3}$ π p^2 [3 E I+C E—C I]
=$\frac{1}{3}$ π p^2 (3 E I—E I)=$\frac{1}{3}$ π p^2 2 E I
ó vol. C A B=2 π p E I×$\frac{1}{3}$ p=$\frac{1}{3}$ sup. A B×p.

que es lo que se tenía que demostrar.

711.—Este teorema nos servirá de fundamento para determinar el volumen de la esfera, del *sector* y del *segmento* esférico.

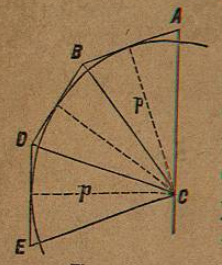

Figura 341.

En efecto, si nos imaginamos un polígono regular A B D E.... (fig. 341) circunscrito á un círculo, y que éste gire al rededor de un radio A C, el volumen engendrado por la rotación del polígono será igual á la suma de los volúmenes producidos por los triángulos A B C, B D C, D C E.... y tendrá por expresión $\frac{1}{3}$ p (sup. A B+sup. B D +sup. D E....) Esto es, el volumen engendrado por el polígono tiene por valor la tercera parte del producto del radio por la superficie engendrada por los lados del polígono. Cuando los lados de éste sean infinitamente pequeños *el volumen se convertirá en el de la esfera cuyo valor será la tercera parte del producto de su superficie por el radio.*

Y como la superficie de la esfera es cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos (684), el volumen de la esfera tendrá por expresión:

v=4 π R^2×$\frac{1}{3}$ R=$\frac{4}{3}$ π R^3

ó

v=$\frac{1}{6}$ π D^3

sustituyendo por R su valor en función del diámetro, que es $\frac{D}{2}$.

712.—*Se llama sector esférico la porción de la esfera* C D E A (fig. 342) *limitada por la superficie cónica* D C E *que tiene por vértice el centro de la esfera y por el casquete esférico* A D E. El sector esférico puede concebirse engendrado por la rotación del sector circular A C D al rededor del radio A C.

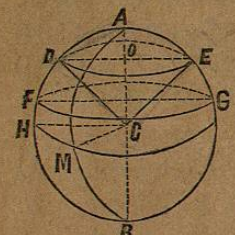

Figura 342.

El volumen del sector esférico, conforme al teorema demostrado (710), *tendrá por valor la tercera parte del producto del radio de la esfera por la superficie del casquete esférico* D E A.

Llamando *a* la altura A O del casquete esférico, y recordando (684) que la área de éste está expresada por 2 π R *a*, el volumen del sector esferico tendrá por expresión:

v=$\frac{2}{3}$ π R^2 *a*

713.—Se llama *segmento esférico* la porción de la esfera D E A (fig. 342), engendrada por la rotación del segmento circular D O E A al rededor de la flecha O A.

El volumen del segmento esférico es igual al del sector C D E A menos el del cono C D E, y tendrá por valor:

v=$\frac{2}{3}$ π R^2 *a*—$\frac{1}{3}$ π D O^2×O C.... (1)

D O^2=B O×O A (538)=(2 R—*a*) *a*=2 R *a*—*a*^{2}

O C=R—*a*

D O^2×O C=(2 R *a*—*a*^{2}) (R—*a*)=2 R^2 *a*—3 R *a*^{2}+*a*^{3}

sustituyendo en (1)

v=$\frac{2}{3}$ π R^2 *a*—$\frac{1}{3}$ π (2 R^2 *a*—3 R *a*^{2}+*a*^{3})

ejecutando la multiplicación, reduciendo y sacando como factor común á $\frac{1}{3}$ π *a*^{2}, se tiene finalmente:

volumen del segmento esférico=v=$\frac{1}{3}$ π *a*^{2} (3 R—*a*)

El volumen de un segmento de dos bases paralelas F G E D, es igual á la diferencia de los volúmenes de los segmentos que se apoyan sobre los círculos que respectivamente le sirven de bases.

Para determinar el volumen engendrado por la revolución del segmento circular A i B D (fig. 342 bis) girando al rededor del diámetro

En resumen, el volumen de la esfera $v = \frac{4}{3}\pi R^3$
„ del cilindro $v' = 2\pi R^3$
„ del cono $v'' = 3\pi R^3$

luego $v : v' : v'' :: \frac{4}{3}\pi R^3 : 2\pi R^3 : 3\pi R^3 :: 4 : 6 : 9.$

Se ve que estas cantidades, son entre sí como 4: 6: 9, de lo que se deduce: 1° que el volumen de la esfera es los dos tercios de el del cilindro circunscrito: 2° que es igual á los cuatro novenos de el del cono; y 3° que el volumen del cilindro es medio proporcional entre el de la esfera y el del cono, supuesto que $6 = \sqrt{4 \times 9}$.

715.—*Los volúmenes de dos pirámides cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Si representamos por P el volumen de una pirámide cuya base sea B y A su altura, tendrémos (702): $P = \frac{1}{3}$ B. A; y llamando p el volumen de la otra pirámide, b su base y a su altura, se tiene: $p = \frac{1}{3}$ b. a. Luego

$$P : p :: \tfrac{1}{3} B.\ A : \tfrac{1}{3} b.\ a.$$

multiplicando por 3 la 2ª razón

$$P : p :: B.\ A : b.\ a$$

que es lo que se quería demostrar.

716.—*Los volúmenes de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cubos de sus alturas ó los cubos de sus líneas homólogas.*

Conforme al teorema del número anterior, se tiene:

$$P : p :: B \times A : b \times a$$

por ser las pirámides semejantes (644)

$$B : b :: A^2 : a^2$$

multiplicando estas proporciones y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$P : p :: A^3 : a^3$$

y como por ser las pirámides semejantes todas sus líneas homólogas son proporcionales entre sí; llamando L y l las líneas que se escojan, se tiene:

$$A : a :: L : l$$

ó $A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$

luego $P : p :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3$

717.—*Los volúmenes de los poliedros semejantes son entre sí como los cubos de sus líneas homólogas.*

Llamemos V y v los volúmenes de los poliedros; P, P', P".....las pirámides en que se puede descomponer el primer poliedro V, y p, p', p".... las pirámides semejantes de que se compone el segundo poliedro v; L, L', L".... las líneas del primero y l, l', l"..... las homólogas del otro. Se tiene (716):

$$P : p :: L^3 : l^3 \qquad P' : p' :: L'^3 : l'^3 \text{ etc.}$$

por ser semejantes los poliedros, lo serán sus caras y tendrémos:

$$L : l :: L' : l' \ldots.$$

elevando al cubo $L^3 : l^3 :: L'^3 : l'^3 \ldots.$

luego $P : p :: P' : p' :: P'' : p'' \ \ldots \ :: L^3 : l^3$

y como la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente (318—8°) resulta:

$$P+P'+P''\ldots. : p+p'+p''\ldots. :: L^3 : l^3$$

ó $$V : v :: L^3 : l^3$$

que es lo que debíamos demostrar.

718.—*Los volúmenes de los cilindros rectos engendrados por rectángulos semejantes son proporcionales á los cubos de sus radios ó á los cubos de sus alturas.*

Representarémos por V el volumen de un cilindro, por R el radio de su base, y por H su altura; por v el volumen del otro cilindro, por r el radio de su base, y por h su altura. Tendrémos (700):

$$V : v :: \pi R^2 H : \pi r^2 h \ldots. (1)$$

como los rectángulos generadores son semejantes, y los lados de estos rectángulos son los radios y las alturas de los respectivos cilindros, se tiene:

$$H : h :: R : r$$

multiplicando ordenadamente y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$V : v :: R^3 : r^3$$

Si elevamos al cubo los términos de la penúltima proporción se tiene:

$$H^3 : h^3 :: R^3 : r^3$$

luego: $$V : v :: H^3 : h^3$$

que es lo que se debía demostrar.

719.—*Los volúmenes de los conos rectos engendrados por triángulos rectángulos semejantes, son proporcionales á los cubos de sus líneas homólogas.*

Llamemos V y v los volúmenes de los conos, H y h sus respectivas alturas, R y r sus radios, y A, a sus generatrices. Por ser semejantes sus triángulos generadores, se tiene:

$$R : r :: H : h :: A : a \ldots . (1)$$

Por otra parte (703) $$V : v :: \tfrac{1}{3}\pi R^2 H : \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \ldots . (2)$$

Elevando al cuadrado la primera proporción de la serie de razones (1)

$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$$

multiplicando los términos de esta proporción por los de la (2) y suprimiendo los factores comunes, resulta:

$$V : v :: H^3 : h^3$$

si elevamos al cubo los términos de las razones iguales (1) se tiene:

$$R^3 : r^3 :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3$$

luego $$V : v :: R^3 : r^3 :: H^3 : h^3 :: A^3 : a^3$$

que es lo que se quería demostrar.

720—*Los volúmenes de las esferas son proporcionales á los cubos de sus radios ó á los cubos de sus diámetros.*

Hemos visto (711) que el volumen de la esfera tiene por expresión $\frac{4}{3}\pi R^3$ ó $\frac{1}{6}\pi D^3$, así es que si representamos por V y v los volúmenes de las esferas, por R y r sus respectivos radios, y por D y d sus diámetros, tendrémos:

$$V : v :: \tfrac{4}{3}\pi R^3 : \tfrac{4}{3}\pi r^3 :: \tfrac{1}{6}\pi D^3 : \tfrac{1}{6}\pi d^3$$

y suprimiendo los factores comunes

$$V : v :: R^3 : r^3 :: D^3 : d^3$$

que es lo que se quería demostrar.

721.—*Los volúmenes de los poliedros simétricos son iguales.*

Si imaginándonos dos poliedros P y P' simétricos con relación á un plano, tomamos un punto O en el interior de uno de ellos, y su simétrico o' en el otro, y desde estos puntos tiramos rectas á todos los vértices, nos resultarán divididos los dos poliedros en el mismo número de pirámides respectivamente simétricas. Estas pirámides tienen sus bases y sus alturas iguales (657), luego serán equivalentes en volumen considerándolas de dos en dos, y en consecuencia la suma de todas las que forman el poliedro P será igual á la suma de las pirámides que constituyen el poliedro P'.

722.—PROBLEMAS.—I.—*Determinar el volumen de un paralelipípedo rectangular, en el que los tres lados de uno de sus triedros miden:* $1^{m}50$, 42 *centímetros y* 50 *centímetros.*

Siendo necesario expresar las dimensiones lineales refiriéndolas á la misma unidad, elegirémos el metro para que el volumen resulte en metros cúbicos. Llamando V el volumen que buscamos, tendrémos (694):

$$V = 1^{m}50 \times 0^{m}42 \times 0^{m}50 = 0^{m.\,cub.}315$$

Si hubiéramos querido determinar el volumen en litros, las dimensiones lineales las habríamos reducido á decímetros, y nos habría resultado: $V = 15^{d} \times 4'2 \times 5 = 315$ litros.

II.—*Determinar el volumen de un cilindro cuya base tiene 40 centímetros de radio, y 60 centímetros de altura.*

La fórmula correspondiente es (700):

$$v = \pi r^2 h$$

sustituyendo $$v = 3'141593 \times 40^2 \times 60 = 301\,592'928^{cent.\,cúb.}$$

$$v = 301'592\,928^{litros}$$

III.—*Calcular el volumen de un cono cuya altura es de* $2^{m}5$ *y el radio de su base* $0^{m}30$.

La fórmula que expresa el volumen de un cono es (703):

$$v = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

sustituyendo $$v = \tfrac{1}{3}\, 3'141\,593 \times 0^{m}30^2 \times 2'5$$

de donde $$v = 0'235\,619\,475^{m.\,cúb.} = 235'619\,475^{litros}$$

IV.—*Calcular el volumen de un trozo de cono, cuya altura es de* $1'2^{m}$, *y los radios de sus bases son* $0'7^{m}$ *y* $0'9^{m}$.

La fórmula respectiva es (709):

$$v=\tfrac{1}{3}\pi a (R^2+r^2+R r)$$

sustituyendo

$$v=\tfrac{1}{3} 3'141593\times 1'2 (0'9^2+0'7^2+0'9\times 0'7)$$

ó

$$v=2'425309796^{\text{m. cúb.}}$$

V.—*Calcular el volumen de una esfera cuyo diámetro es de* $12'5^{m}$.

La fórmula que expresa el volumen de la esfera es (711):

$$v=\tfrac{1}{6}\pi D^3$$

sustituyendo

$$v=\tfrac{1}{6} 3'141593\times 12'5^3$$

y resulta

$$v=1026'537^{\text{m. cúb.}}$$

VI.—*Determinar el radio de una esfera cuyo volumen es de* $2144'661^{\text{litros.}}$

De la fórmula que expresa el volumen de la esfera (711):

$$v=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

despejarémos á

$$r=\sqrt[3]{\frac{3 v}{4\pi}}$$

sustituyendo

$$r=\sqrt[3]{\frac{3\times 2144'661}{4\times 3'141593}}$$

ejecutando la operación resulta:

r=8, que serán decímetros, por estar estimado el volumen en litros.

VII.—*Determinar el volumen de un sector esférico cuya altura es de* $4'5^{m}$, *y el radio de la esfera 12 metros.*

La fórmula que expresa el valor del volumen del sector esférico es (712):

$$v=\tfrac{2}{3}\pi R^2 a$$

sustituyendo

$$v=\tfrac{2}{3} 3'141593\times 12^2\times 4'5$$

ó

$$v=1357'168^{\text{m. cúb.}}$$

VIII.—*Determinar el volumen de un segmento esférico cuya altura es la mitad del radio de la esfera, que tiene 16 decímetros.*

El volumen del segmento esférico está expresado por la fórmula (713)

$$v=\tfrac{1}{3}\pi a^2 (3 R-a)$$

sustituyendo

$$v=\tfrac{1}{3} 3'141593\times 8^2 (3\times 16-8)$$

ó

$$v=2680'826^{\text{litros.}}$$

IX.—*Se quiere determinar el volumen de un cubo cuya diagonal es de 8 decímetros.*

Representando por d la diagonal del cubo, y por a una de sus aristas, tendrémos:

$$d^2=3 a^2 \quad (668)$$

y el volumen del cubo

$$v=a^3 \quad (694)$$

despejando en la primera ecuación á a, y sustituyendo su valor en la segunda, resulta:

$$v=\frac{d^3}{\sqrt{27}}$$

sustituyendo el valor numérico de la diagonal del cubo en nuestro problema, se tiene:

$$v=\frac{8^3}{\sqrt{27}}=98'5344^{\text{litros}}$$

X.—*Determinar gráficamente el radio de una esfera* C (fig. 344).

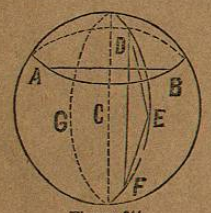

Figura 344.

Tomemos dos puntos cualesquiera sobre la esfera, A y B, haciendo centro en ellos, y con un compás de puntas curvas determinémos sucesivamente con tres radios diferentes tres puntos D, E y F equidistantes de A y de B, por lo cual el plano que pasa por D, E y F será perpendicular al medio de la recta A B, y todos sus puntos estarán equidistantes de A y de B; luego pasará por el centro de la esfera, siendo un círculo máximo de ésta la sección D E F G. Esto supuesto, si sobre un plano llevamos las distancias D E, E F y D F construirémos el triángulo D E F, y si circunscribimos al triángulo un círculo, determinando el radio de este círculo obtendrémos el de la esfera.

FIN.

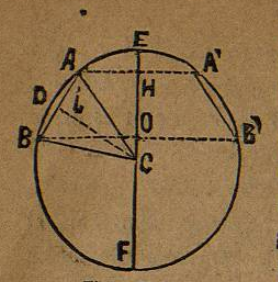

Figura 342 bis.

E F, que se llama *uña esférica*, supondrémos que para fijar la magnitud del segmento se conozca la cuerda A B, y que para determinar la posición del mismo segmento con relación al eje de revolución se da la proyección O H de su cuerda A B. Esto supuesto el volumen engendrado por la revolución del segmento A i B D es igual al engendrado por el sector A C B D menos el engendrado por el triángulo A C B girando ambas figuras al rededor de E F. Así pues:

vol. seg. A i B D=vol. sector A C B D—vol. triángulo A C B....(1)

conforme á lo demostrado (710)

$$\text{vol. sector A C B D}=\text{sup. zona A D B}\times\frac{R}{3}=2\pi R\times H O\times\frac{R}{3}\ (684)$$

$$\text{vol. sector A C B D}=\frac{2}{3}\pi R^2\times H O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Ahora conforme á lo demostrado (683 y 710)

$$\text{vol. triáng. A C B}=2\pi Ci\times H O\times\frac{Ci}{3}=\frac{2}{3}\pi Ci^2\times H O$$

como en el triángulo rectángulo A i C

$$C i^2=A C^2-Ai^2=R^2-\frac{A B^2}{4}$$

tendrémos:

$$\text{vol. triáng. A C B}=\frac{2}{3}\pi H O\left(R^2-\frac{A B^2}{4}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

sustituyendo los valores de las ecuaciones (2) y (3) en la (1) resulta:

$$\text{vol. seg. A i B D}=\frac{2}{3}\pi R^2 H O-\frac{2}{3}\pi H O\left(R^2-\frac{A B^2}{4}\right)$$

ejecutando las operaciones y reduciendo:

$$\text{vol. seg. A i B D}=\frac{1}{6}\pi H O\times A B^2$$

que es la expresión del volumen engendrado por la rotación de un segmento circular en función de su cuerda y de la proyección de ésta sobre el eje de rotación.

Se llama cuña á la porción del volumen de la esfera A B M A H (figura 342) *comprendida entre dos semicírculos máximos que terminan en el mismo diámetro* A B *y la superficie de un huso* A H B M.

Como si dividimos en dos, tres ó más partes iguales el ángulo H C M del huso que fija la magnitud de la cuña, resultará ésta dividida en dos, tres ó igual número de partes, por ser sobreponibles las cuñas de la misma esfera que corresponden á husos iguales, resulta que los volúmenes de las cuñas son proporcionales á los ángulos de sus husos, y siendo la esfera el conjunto de un número dado de cuñas iguales, resulta:

vol. cuña A B M A H : vol. esfera :: como arco H M : circf. círc. máx.

luego *el volumen de una cuña es igual al de la esfera multiplicado por la relación que existe entre el número de grados del ángulo* H C M *del huso de la cuña y* 360°.

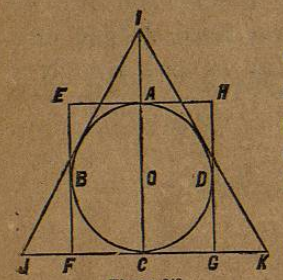

Figura 343.

714.—Si al círculo A B C D (fig. 343) circunscribimos un cuadrado E F G H y un triángulo equilátero I J K, y nos imaginamos que gira este sistema al rededor del eje I A C, resultarán un cilindro y un cono circunscritos á la esfera, y tendrémos:

1° El volumen de la esfera, que lo representarémos por v,

$$v=\frac{4}{3}\pi R^3$$

2° El del cilindro, que lo llamarémos v',

$$v'=\pi R^2\times 2 R=2\pi R^3$$

3° El volumen del cono circunscrito, que representarémos por v",

$$v''=\frac{1}{3}\pi C J^2\times C I$$

Ahora bien, hemos visto (685) que $J C^2=3 R^2$.

Para determinar el valor de C I, considerarémos el triángulo rectángulo I C J, en el que su hipotenusa J I=2 J C, y $J I^2=4 J C^2=12 R^2$

luego $$I C=\sqrt{J I^2-J C^2}=\sqrt{12 R^2-3 R^2}=3 R$$

sustituyendo en el valor de v" los de C J² y de C I, se tiene:

$$v''=\frac{1}{3}\pi\ 3 R^2\times 3 R=3\pi R^3$$