Resolver un triángulo es calcular los valores numéricos de sus elementos desconocidos, cuando para esto tenemos los datos suficientes.

El problema de que casi siempre se ocupa la trigonometría, es: conocidos tres de los elementos de un triángulo, determinar los demás.

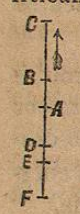
725.—Teniendo que figurar en nuestros cálculos los ángulos cuyos valores son proporcionales á los arcos, y debiendo reemplazarse para facilitar las investigaciones, los arcos por otras magnitudes auxiliares, llamadas líneas trigonométricas, que tienen relaciones fijas con los arcos y los ángulos, ántes de ocuparnos especialmente de las líneas trigonométricas daremos, en general, una idea de las funciones circulares.

Se llama funcion, toda expresion analítica que contiene dos cantidades variables, en la que el valor de una de ellas depende del que se asigne á la otra. Por ejemplo: la superficie del círculo es una funcion del radio; porque como hemos visto, estando representada la superficie del círculo por la expresion analítica

$$s = \pi r^2$$

á cada valor que tenga ó le demos al radio r, corresponderá otro determinado para la superficie s y recíprocamente. Son pues r y s cantidades variables, pero cuyos valores cambian correlativamente segun una ley cifrada en la fórmula $s = \pi r^2$

726.—Lineas negativas y positivas.—Hemos dejado indicado (268) que los signos + y — tienen la notable propiedad de indicar analíticamente la oposicion de sentido de que son susceptibles ciertas cantidades. Si sobre una línea recta ó curva F C (Fig. 345) consideramos como positivas las medidas tomadas arriba de A en la direccion indicada por la flecha, las medidas en sentido contrario se considerarán como negativas. Las magnitudes AB, y BC de 3 y de 7 milímetros, irán precedidas del signo +, y las AD, DE y EF respectivamente iguales á 5, 2 y 4 milímetros, estarán marcadas con el signo —. Si suponemos un móvil que partiendo del punto A subió 6 mm., en seguida bajó 10, luego subió 8, y por último bajó 7 mm., su distancia al punto de partida estará expresada por la ecuacion:



(Fig. 345)

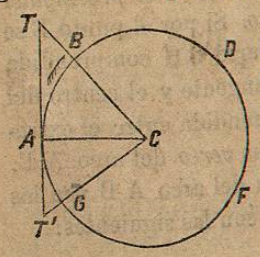
$$x = +6 - 10 + 8 - 7$$

ó

$$x = -3$$

lo que quiere decir que el móvil quedaba 3 mm. abajo de A por estar

el resultado precedido del signo —. Igualmente, si convenimos en considerar como positivas las distancias medidas á la derecha de un plano ó de una recta, serán negativas las medidas en direccion opuesta. Es de notar que el sentido en que se estimen los signos de las cantidades es enteramente arbitrario, pudiendo haberse considerado en el caso de nuestra figura como positivas las distancias tomadas abajo de A, en direccion contraria de la indicada por la flecha; pero entónces serían negativas las medidas hechas hácia arriba.

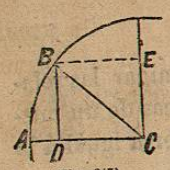


(Fig. 346)

En el círculo de la figura 346, si tomamos el punto A como orígen de las medidas hechas sobre la circunferencia y consideramos como positivos los arcos medidos en el sentido en que se mueven las manos de un reloj de A hácia B, D, F, G indicado por la flecha, será necesario reputar como negativos y preceder del signo — á los arcos, como AG, AGF tomados en direccion opuesta. En la misma figura, si convenimos en considerar como positiva la tangente AT tomada arriba de A, estimaremos como negativa la tangente A T' que se mide para abajo de A.

Líneas trigonométricas.

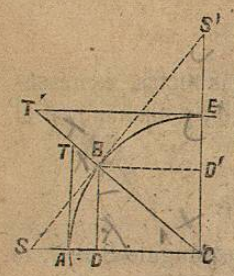
727. *Se llaman líneas trigonométricas á las rectas que tienen una dependencia constante con el arco, de tal manera, que conociendo una cualquiera de ellas, se puede determinar el arco á que corresponde y recíprocamente.*



(Fig. 347)

Por ejemplo: dado el arco A B, (fig. 347) la recta B D bajada desde uno de sus extremos B perpendicular al radio C A que pasa por el otro extremo A, es una línea trigonométrica que se llama *seno* del arco A B ó del ángulo B C A. Como al arco A B no puede corresponder mas que un solo *seno* B D, en el círculo cuyo radio es A C, resulta que hay una relacion fija entre la magnitud del arco y la de su seno. Si conocido el seno B D, quisiéramos gráficamente determinar la magnitud de su arco, en el punto C levantariamos una perpendicular E C igual al seno dado B D, y tirando por su extremo E una paralela à A C su interseccion

que son semejantes por ser rectángulos y tener el ángulo S'=B C D como complementos ambos del mismo ángulo B C S', se tiene:



(Fig. 348)

$$S'C : BC :: BC : BD$$

sustituyendo $\text{cosec.a} : r :: r : \text{sen.a}$

luego $$\text{cosec.a} = \frac{r^2}{\text{sen.a}}$$

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes B D C y T' E C, se tiene:

$$T'E : EC :: DC : BD$$

sustituyendo $\text{cot.a} : r :: \text{cos.a} : \text{sen.a}$

luego $$\text{cot.a} = \frac{r.\text{cos.a}}{\text{sen. a}}$$

Por último, comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes T' E C y T A C, se tiene:

$$T'E : EC :: AC : AT$$

sustituyendo $\text{cot.a} : r :: r : \text{tang.a}$

luego $$\text{cot.a} = \frac{r^2}{\text{tang.a}}$$

Como se habrá observado, para sacar las cinco últimas fórmulas, se ha comparado el triángulo de que forma parte la línea trigonométrica cuyo valor se busca, con el triángulo B D C en que entran el seno y coseno, excepto en el último caso que el triángulo de que forma parte la cotangente se comparó con aquel en que entra la tangente. Ademas, la primera razon la hemos formado siempre con la línea trigonométrica cuyo valor buscamos y el radio. La segunda razon, naturalmente quedará determinada por los lados homólogos.

Para determinar el seno verso, basta observar, que

$$AD = AC - DC$$

sustituyendo $\text{sen.ver.a} = r - \text{cos.a}$

Para determinar el coseno verso, observaremos, que

$$ED' = EC - CD'$$

y como C D'=B D sustituyendo, resulta:

$$\text{cos.ver.a} = r - \text{sen.a}$$

Para mejor fijar en la memoria de los alumnos las anteriores fórmulas, que son de muy frecuente uso, las pondremos á continuacion:

$$r^2 = \text{sen}^2\text{a} + \text{cos}^2\text{a}$$

$$\text{sec}^2\text{a} = r^2 + \text{tang}^2\text{a}$$

$$\text{cosec}^2\text{a} = r^2 + \text{cot}^2\text{a}$$

$$\text{tang.a} = \frac{r.\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$$

$$\text{sec.a} = \frac{r^2}{\text{cos.a}}$$

$$\text{cosec.a} = \frac{r^2}{\text{sen.a}}$$

$$\text{cot.a} = \frac{r.\text{cos.a}}{\text{sen.a}}$$

$$\text{cot.a} = \frac{r^2}{\text{tang.a}}$$

de esta se deduce: $$\text{tang.a} = \frac{r^2}{\text{cot.a}}$$

$$\text{sen.ver.a} = r - \text{cos.a}$$

$$\text{cos.ver.a} = r - \text{sen.a}$$

Hemos dicho que generalmente y con el fin de simplificar las fórmulas, se hace el radio del círculo al cual se refieren las líneas trigonométricas igual á la unidad. Si en las fórmulas anteriores introducimos la condicion de

$$r = 1$$

se trasformarán en las siguientes, que son las que más á menudo se usan:

$$1 = \text{sen}^2\text{a} + \text{cos}^2\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{sec}^2\text{a} = 1 + \text{tang}^2\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\text{cosec}^2\text{a} = 1 + \text{cot}^2\text{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{tang.a} = \frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\text{sec.a}=\frac{1}{\text{cos.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\text{cot.a}=\frac{\text{cos.a}}{\text{sen.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\text{cot.a}=\frac{1}{\text{tang.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\text{tang.a}=\frac{1}{\text{cot.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\text{sen.ver.a}=1-\text{cos.a}\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$$\text{cos.ver.a}=1-\text{sen.a}\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

730.—Nociones sobre la homogeneidad.—En álgebra (241) explicamos lo que se entiende por grado de un término, y por expresiones homogéneas: ahora haremos notar, que al tratar algebráicamente una cuestion de geometría, cada literal, por regla general, representa una línea: de modo que *a* no puede introducirse en los cálculos, si no es refiriendo la magnitud de la línea que representa á la de otra que implícitamente se ha tomado por unidad, como el metro, la pulgada, etc., ó á la de otra línea *b* conocida. En el primer caso, *a* representa un número concreto de metros, pulgadas, etc.; y en el segundo, $\frac{a}{b}$ será un número abstracto, al cual se podrá sustituir la relacion de otras magnitudes *c*, y *d* á condicion de que se tenga la ecuacion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

No entrando en los cálculos sino expresiones homogéneas, como todas las operaciones y combinaciones que por las reglas del cálculo se ejecuten con ellas, como reduccion á un comun denominador, adicion, sustraccion, multiplicacion, division, elevacion á la misma potencia y extraccion de raíz del mismo grado, conducen á un resultado homogéneo; resulta que cuando no se ha tomado como unidad una de las líneas que entran en la cuestion, y cada una de ellas se representa por una literal, todas las expresiones del cálculo, sea en su orígen al establecer las ecuaciones fundamentales, sea en las intermedias ó en las definitivas, tendrán que ser homogéneas.

Para plantear un problema valiéndonos de las relaciones geométri-

cas que forman parte del enunciado, no podemos hacerlo sino de dos maneras: estableciendo proporciones, ó ecuaciones. En el primer caso, siendo homogéneos los términos de las respectivas razones, lo serán los miembros de las ecuaciones que de ellas resulten, sea dividiendo cada antecedente por su consecuente, ó formando é igualando los productos de extremos y medios. Si se forma una ecuacion, habrá que expresar la igualdad de extensiones lineales por medio de términos de una dimension, ó la equivalencia de valores superficiales de dos dimensiones como x^2, ab, ó de volúmen indicados por términos de tres dimensiones como r^3, abc.

Estando las ecuaciones fundamentales de un problema formadas de términos homogéneos, como todas las operaciones que con ellos se hagan, tienen que ser iguales para que no se altere la ecuacion, se infiere que cuando se ha representado por una letra cada una de las líneas que entran en un problema, las expresiones todas del cálculo serán homogéneas.

Al contrario, cuando por simplificar los cálculos y las fórmulas finales, alguna de las líneas que forman parte de la cuestion, se ha tomado por unidad, el resultado podrá dejar de ser homogéneo, en razon de que siendo las diversas potencias de 1 iguales á 1, el *grado* de cada uno de los términos en que entra esta línea puede resultar disminuido una ó varias unidades.

Por ejemplo: en las fórmulas todas que hemos sacado representando el radio por r, y las demás líneas de la figura por sus respectivas anotaciones, sea fundándonos en que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos, que es una expresion de equivalencia de superficies, ó en la comparacion de triángulos semejantes, hemos obtenido resultados homogéneos, tales como

$$r^2=\text{sen}^2\text{a}+\text{cos}^2\text{a}$$

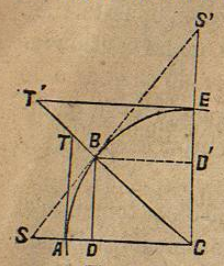
$$\text{sec}^2\text{a}=r^2+\text{tang}^2\text{a}$$

$$\text{tang.a}=\frac{\text{r.sen.a}}{\text{cos.a}}$$

$$\text{cot.a}=\frac{r^2}{\text{tang.a}}$$

pero cuando hemos tomado el radio del círculo igual á la unidad, estas mismas fórmulas se han trasformado en

con la circunferencia determinaría el otro extremo del arco A B que tiene por seno á B D.



(Fig. 348)

728.—Diversas líneas trigonométricas.—Considerando el arco A B (fig. 348) acabamos de ver que la recta B D es su *seno*. *Tangente es la perpendicular* AT *levantada por uno de los extremos del arco, al radio que termina en este punto* A *hasta que encuentra al radio* C B *prolongado que pasa por el otro extremo.* Si por el punto B se tira la tangente B S, la parte S C comprendida entre el extremo S de la tangente y el centro del círculo se llama *secante.** La recta A D, comprendida entre el extremo A del arco y el pié D del seno, se llama *seno verso* del arco A B. En resúmen, *las líneas trigonométricas directas* del arco A B con las abreviaturas con que comunmente se les indica, son las siguientes:

B D=sen. A B
A T=tang. A B
S C=sec. A B
A D=sen. ver. A B

El complemento del arco A B es B E y conforme á las definiciones anteriores B D'=D C será el seno del arco B E, E T' será su tangente, S' C su secante, y E D' su seno verso; pero al seno del complemento de un arco se le llama *coseno*, á la tangente del complemento *cotangente*, á la secante del complemento *cosecante*, y al seno verso del complemento *coseno verso;* por lo cual *las líneas trigonométricas indirectas* del arco A B con las abreviaturas usadas, serán las siguientes:

D C =cos. A B
E T'=cot. A B
S' C =cosec. A B
E D'=cos. ver. A B.

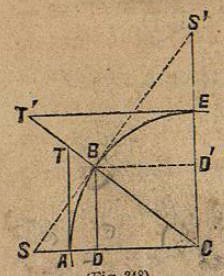
729.—Fórmulas fundamentales.—Vamos á determinar las relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas de un mismo ángulo y el radio del círculo, que generalmente se toma igual á la unidad con el fin de simplificar las fórmulas.

Considerando el triángulo rectángulo B D C, (fig. 348) y en virtud

* Varios autores toman como secante la recta C T que es igual á S C por ser iguales los triángulos rectángulos S B C y T A C; no haciéndolo nosotros para evitar los inconvenientes que tal sistema presenta para fijar el signo de la secante.

de que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos, se tiene:

$$BC^2=BD^2+DC^2$$



(Fig. 348)

sustituyendo los valores de esas rectas, representando por r el radio del círculo, y llamando a el arco A B, resulta:

$$r^2=\text{sen}^2a+\cos^2a$$

Considerando el triángulo rectángulo S B C, se tiene:

$$SC^2=BC^2+BS^2$$

sustituyendo los valores de estas rectas y atendiendo á que por la igualdad de los triángulos S B C y T A C (384) B S=A T=tang.a, resulta:

$$\sec^2a=r^2+\text{tang}^2a$$

Considerando el triángulo rectángulo S' B C, se tiene:

$$S'C^2=CB^2+BS'^2$$

Atendiendo á que por la igualdad de los triángulos S' B C y T' E C (384) B S'=E T'=cot a, y sustituyendo los valores de las otras rectas resulta:

$$\text{cosec}^2a=r^2+\cot^2a.$$

Siendo B D paralela á T A, el triángulo B D C será semejante á T A C (514) y á su igual S B C. Comparando los lados homólogos de los dos primeros triángulos, se tiene:

$$AT : AC :: BD : DC$$

sustituyendo $\quad \text{tang.a} : r :: \text{sen.a} : \cos.a$

luego $\quad \text{tang.a}=\dfrac{r.\text{sen.a}}{\cos.a}$

Comparando los lados homólogos de los triángulos S B C y B D C, se tiene:

$$SC : BC :: BC : DC$$

sustituyendo $\quad \sec.a : r :: r : \cos.a$

de donde $\quad \sec.a=\dfrac{r^2}{\cos.a}$

Comparando los lados homólogos de los triángulos B D C y S' B C,