$$1=\text{sen}^2a+\cos^2a$$

$$\sec^2a=1+\text{tang}^2a$$

$$\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\cos.a}$$

$$\cot.a=\frac{1}{\text{tang.a}}$$

cuyas expresiones no son ya homogéneas.

Sin embargo, como en este último caso se sabe cuál es la línea del problema que se ha tomado igual á la unidad, basta multiplicar los términos por una potencia adecuada de esa línea, que en nuestro ejemplo ha sido r, para tener desde luego las fórmulas que se habrian obtenido sin hacer esa simplificacion.

Así, pues, en lo de adelante para facilitar los cálculos supondremos el radio igual á 1, y cuando sea necesario restituiremos el valor de r suprimido, multiplicando por una potencia adecuada de r los términos que lo necesiten, para hacer todos los de nuestras fórmulas de igual grado.

Repetiremos que el grado de un término de la forma entera se estima por el número de sus factores literales; que el de una fraccion se determina restando las dimensiones del denominador de las del numerador; y que en un radical hay que dividir por el índice del radical el grado de la expresion que está dentro del signo. Sin embargo, debemos advertir que algunas veces al estimar las dimensiones de un término, no se llevan en cuenta algunos factores aun cuando sean literales. Esto se hace *cuando alguna literal está representando un coeficiente numérico.* Por ejemplo, si x=n.a representa un arco múltiplo de a, como n está en lugar del coeficiente 1, 2, 3.... la expresion x=n.a será homogénea, aunque aparentemente el 2º miembro tenga dos dimensiones. Esta observacion es igualmente aplicable al caso en que una línea trigonométrica venga á hacer el oficio de coeficiente. Por ejemplo: sen.30º=$\frac{1}{2}$, y si en una expresion representamos 30º por m, sen.m no deberá considerarse como factor, porque está en lugar del conficiente $\frac{1}{2}$; pero por regla general, las líneas trigonométricas representan líneas, y las expresiones en que entran deben ser homogéneas por indicar resultados de operaciones idénticas hechas con términos del mismo grado.

731.—Problemas.—I.—*Determinar todas las líneas trigonométricas en funcion del seno.*

De la fórmula (1) nº 729 resulta $\cos.a=\sqrt{1-\text{sen}^2a}$

,, (4) ,, $\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\cos.a}=\frac{\text{sen.a}}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}$

,, (7) ,, $\cot.a=\frac{\cos.a}{\text{sen.a}}=\frac{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}{\text{sen.a}}$

,, (5) ,, $\sec.a=\frac{1}{\cos.a}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}$

,, (6) ,, $\text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}$

,, (10) ,, $\text{sen.ver.a}=1-\sqrt{1-\text{sen}^2a}$

,, (11) ,, $\text{cos.ver.a}=1-\text{sen.a}$

II.—*Determinar todas las líneas trigonométricas en funcion del coseno.*

De la fórmula (1) nº 729 resulta: $\text{sen.a}=\sqrt{1-\cos^2a}$

,, (4) ,, $\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\cos.a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2a}}{\cos.a}$

,, (7) ,, $\cot.a=\frac{\cos.a}{\text{sen.a}}=\frac{\cos.a}{\sqrt{1-\cos^2a}}$

,, (5) ,, $\sec.a=\frac{1}{\cos.a}$

,, (6) ,, $\text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen,a}}=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2a}}$

,; (10) ,, $\text{sen.ver.a}=1-\cos.a$

,, (11) ,, $\text{cos.ver.a}=1-\sqrt{1-\cos^2a}$

$$\sec.a=\frac{1}{\cos.a}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}$$

elevando al cuadrado y quitando los denominadores:

$$\sec^2a-\sec^2a.\text{sen}^2a=1$$

despejando á sen^2a y extrayendo raíz, resulta:

$$\text{sen}.a=\frac{\sqrt{\sec^2a-1}}{\sec.a}$$

Para la *cosecante* tenemos:

$$\text{cosec}.a=\frac{1}{\text{sen}.a}$$

luego $$\text{sen}.a=\frac{1}{\text{cosec}.a}$$

Para el seno verso tenemos:

$$\text{sen.ver}.a=1-\cos.a=1-\sqrt{1-\text{sen}^2a}$$

de donde $$\sqrt{1-\text{sen}^2a}=1-\text{sen.ver}.a$$

elevando al cuadrado $$1-\text{sen}^2a=(1-\text{sen.ver}.a)^2$$

$$\text{sen}^2a=1-(1-\text{sen.ver}.a)^2$$

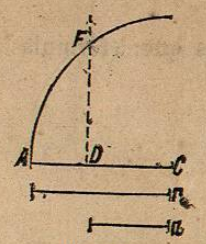
$$\text{sen}.a=\sqrt{1-(1-\text{sen.ver}.a)^2}$$

Para el coseno verso tenemos:

$$\cos.\text{ver}.a=1-\text{sen}.a$$

de la que $$\text{sen}.a=1-\cos.\text{ver}.a$$

VI.—*Construir gráficamente un arco dada la longitud del radio, y la de su coseno.*



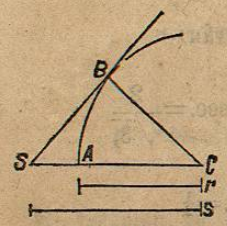
(Fig. 349)

Sea r (fig. 349) la longitud del radio, *a* la de su coseno. Haciendo centro en C y con un radio A C=r se trazará un arco de magnitud indefinida. Sobre el radio y desde el centro hácia A se llevará una parte C D igual al coseno *a*. En el punto D levantarémos una perpendicular y su interseccion con el arco determinará la magnitud del A F buscado.

Al resolver este problema hemos prescindido de los signos que pueden tener el arco y el coseno,

porque todavía no hemos explicado los signos de las líneas trigonométricas.

VII.—*Dada la magnitud r del radio* (fig. 350) *y la s de la secante, determinar gráficamente el ángulo á que corresponde.*



(Fig. 350)

Tómese A C=r: trácese un arco de círculo indefinido: prolónguese el radio C A y tomando C S=s, desde el punto S tírese la tangente S B, cuyo punto de contacto determinará el ángulo B C A buscado.

La determinacion del punto B se hace con más exactitud gráficamente valiéndose del seno ó del coseno, porque estas líneas cortan el arco próximamente en una direccion perpendicular, mientras que el punto de contacto, por finas que sean las líneas, se confunde en mayor extension con la circunferencia.

VIII.—*Determinar el valor de todas las líneas trigonométricas del arco de 30°.*

Si el arco A B (fig. 351) es de 30°, B D será el seno de este arco. Prolongando B D hasta B' por ser el radio C A perpendicular á la cuerda B B' la dividirá en dos partes iguales así como al arco B A B' (475), por consiguiente el arco B A B' será de 60°, su cuerda B B' igual al radio (497), y el seno B D de 30° igual á la mitad del radio. Se vé, pues, que el seno de un arco cualquiera es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo, y en el caso de ser el arco de 30° siendo el radio 1 tendrémos

$$\text{sen}.\ 30°=\tfrac{1}{2}$$

$$\cos.\ 30°=\sqrt{1-\text{sen}^2 30°}=\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{tang}.30°=\frac{\text{sen}.30°}{\cos.30°}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cot.30°=\frac{1}{\text{tang}.\ 30°}=1\div\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

$$\sec.\ 30°=\frac{1}{\cos.\ 30}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

Se ve, pues, que la secante de 30° es doble de la tangente del mismo arco

$$\text{cosec.}30^\circ=\frac{1}{\text{sen. }30^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\text{sen.ver.}30^\circ=1-\text{cos.}30^\circ=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{cos.ver.}30^\circ=1-\text{sen.}30^\circ=1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}$$

En resúmen, *las líneas trigonométricas de* 30° serán:

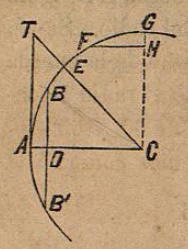
$$\text{sen.}30^\circ=\tfrac{1}{2},\ \text{cos.}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \text{tang.}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{cot.}=\sqrt{3},\ \text{sec.}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\text{cosec.}=2,\qquad \text{sen.ver.}=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \text{cos.ver.}=\tfrac{1}{2}$$

Tomando como base que $\text{cos.}60^\circ=\frac{1}{2}$ y siguiendo el mismo procedimiento se determinarían con facilidad los valores de todas las líneas trigonométricas del arco de 60°; pero supuesto que las líneas directas de un arco son iguales á las indirectas de su complemento, tendrémos que *las líneas trigonométricas de* 60° serán:

$$\text{sen.}60^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ \text{cos.}=\tfrac{1}{2},\ \text{tang.}=\sqrt{3},\ \text{cot.}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{sec.}=2$$

$$\text{cosec.}60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}},\ \text{sen.ver.}=\tfrac{1}{2},\ \text{y cos.ver.}=1-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$



(Fig. 351)

IX.—*Determinar las líneas trigonométricas del arco de* 45° (fig. 351).—Siendo el arco E A de 45° medida del ángulo E C A, el triángulo rectángulo T A C, de que hace parte la tangente, será isósceles, supuesto que los ángulos T y T C A, valdrán cada uno 45°. En consecuencia, T A=A C luego:

$$\text{tang.}45^\circ=1$$

$$\text{sec.}45^\circ=\sqrt{1+\text{tang}^2 45^\circ}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\text{sec.a}=\frac{1}{\text{cos.a}}\qquad \text{ó cos.a}=\frac{1}{\text{sec.a}}$$

luego $$\text{cos.}45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{sen.}45^\circ=\sqrt{1-\text{cos}^2 45}=\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{cot.}45^\circ=\frac{1}{\text{tang.}45^\circ}=1$$

$$\text{cosec. }45^\circ=\frac{1}{\text{sen.}45^\circ}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}$$

$$\text{sen.ver.}45^\circ=1-\text{cos.}45^\circ=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{cos.ver.}45^\circ=1-\text{sen.}45^\circ=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

En resúmen, *para el arco de* 45° *las líneas trigonométricas serán:*

$$\text{sen.}45^\circ=\text{cos.}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \text{tang.}45^\circ=\text{cot.}=1,\quad \text{sec.}45^\circ=\text{cosec.}=\sqrt{2}$$

$$\text{sen.ver.}45^\circ=\text{cos.ver.}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

X.—*Construir un ángulo de 30, de 45 y 60 grados.*

Para construir el ángulo de 30° nos bastará tomar una recta igual á la mitad del radio, la cual nos representará el *seno* del arco buscado, y el problema se convierte en este otro: conocido el radio y el seno, determinar el arco, cuya resolucion hemos indicado (727).

Si el ángulo que trata de construirse es de 45°, tomaremos la tangente ó la cotangente de la misma magnitud que el radio.

Por último, si el ángulo que trata de construirse es de 60°, tomarémos su coseno igual á la mitad del radio, y procederémos como en el problema VI.

Valores correlativos entre los arcos y sus líneas trígonométricas.

732.—Vamos á examinar los diversos valores que pueden tomar las líneas trigonométricas cuando se hace variar el arco á que pertenecen desde 0° hasta $+\infty$ y desde 0° hasta $-\infty$, considerando sus signos, sus magnitudes y los valores que les son correlativos en arcos menores que 90°.

Para facilitar la inteligencia de este importante punto, que servirá de fundamento no solo á las especulaciones de la trigonometría sino tambien á otros ramos de las matemáticas, considerarémos, sucesiva-

III.—*Determinar todas las líneas trigonométricas en funcion de la tangente.*

Hemos visto que

$$\cot.a=\frac{1}{\text{tang.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\sec^2a=1+\text{tang}^2a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

luego

$$\sec.a=\sqrt{1+\text{tang}^2a}$$

$$\text{cosec}^2a=1+\cot^2a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

luego

$$\text{cosec.a}=\sqrt{1+\frac{1}{\text{tang}^2a}}=\frac{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}{\text{tang.a}}$$

$$\text{cosec.a}=\frac{1}{\text{sen.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

luego

$$\text{sen.a}=\frac{1}{\text{cosec.a}}=\frac{\text{tang.a}}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$$

$$\text{sen.a}=\frac{1}{\text{cos.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

luego

$$\text{cos.a}=\frac{1}{\sec.a}=\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$$

$$\text{sen.ver.a}=1-\text{cos.a}=1-\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$$

$$\text{cos.ver.a}=1-\text{sen.a}=1-\frac{\text{tang.a}}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$$

IV.—*Determinar el valor de la tangente en funcion de cada una de las otras líneas trigonométricas.*

En funcion del seno:

$$\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}=\frac{\text{sen.a}}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

Del coseno: $\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2a}}{\text{cos.a}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$

De la cotangente: $\text{tang.a}=\frac{1}{\cot.a}$

De la secante: como, $\sec^2a=1+\text{tang}^2a$

se tiene: $\text{tang.a}=\sqrt{\sec^2a-1}$

De la cosecante: $\text{tang.a}=\frac{1}{\cot.a}=\frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2a-1}}$

Del seno verso: como, $\text{sen.ver.a}=1-\text{cos.a}$

se tiene: $\text{cos.a}=1-\text{sen.ver.a}$

sustituyendo en (b) $\text{tang.a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2a}}{\text{cos.a}}$

resulta $\text{tang.a}=\frac{\sqrt{1-(1-\text{sen.ver.a})^2}}{1-\text{sen.ver.a}}$

Del coseno verso: como, $\text{cos.ver.a}=1-\text{sen.a}$

se tiene: $\text{sen.a}=1-\text{cos.ver.a}$

sustituyendo en (a) $\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}$

resulta: $\text{tang.a}=\frac{1-\text{cos.ver.a}}{\sqrt{1-(1-\text{cos.ver.a})^2}}$

V.—*Determinar el valor del seno en funcion de cada una de las otras líneas trigonométricas.*

Al resolver los cuatro problemas anteriores, hemos hallado ya el valor del seno en funcion del coseno y de la tangente, cuyos valores son:

$$\text{sen.a}=\sqrt{1-\cos^2a}$$

$$\text{sen.a}=\frac{\text{tang.a}}{\sqrt{1+\text{tang}^2a}}$$

Para tenerlo en funcion de la *cotangente*, sabemos que: (fórmulas 6 y 3)

$$\text{sen.a}=\frac{1}{\text{cosec.a}}\ \text{y}\ \text{cosec}^2a=1+\cot^2a$$

luego $\text{sen.a}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2a}}$

Para determinarlo en funcion de la *secante*