$$\text{tang.}a = \text{tang.}\ (180^\circ + a)$$
$$\text{cot.}a = \text{cot.}\ (180^\circ + a)$$

De esto resulta, que *el arco de* 180° *es la amplitud del período de la tangente y de la cotangente.*

746.—Los valores de la tangente y cotangente varían entre $+\infty$ y $-\infty$ y para adquirir estos valores basta un cambio en el arco de 0 á 180°.

Si se tiene un arco $\pm A$ de un gran número de grados, dividiéndolo por 180°, amplitud del período, se tendrá una resta $\pm a < 180^\circ$ cuya tangente y cotangente tendrán el mismo valor y signo que las de $\pm A$.

747.—Dada la magnitud A T (fig. 356) de la tangente, ó la C R de la cotangente, determinar todos los arcos que tienen las mismas líneas trigonométricas.

Si en el punto A levantamos la perpendicular A T, reuniendo el punto T con el centro, tendremos que la tangente A T corresponde al arco A B, y á todos los que resulten de agregarle una ó varias veces 180°. En cuanto á la cotangente levantando en C una perpendicular igual á C R y reuniendo R con O, tendremos que esta cotangente corresponderá al arco A B y á todos los que resulten de agregarle una ó varias veces 180°, que es la amplitud del período. Llamando a el arco A B, x los arcos variables que tienen la misma tangente ó cotangente, y n un número entero cualquiera, cuyo valor puede ser cero, tendremos:

$$A\ T = \text{tang.}x$$
$$C\ R = \text{cot.}x$$

siendo $$x = a + n.\ 180^\circ$$

En el caso de que la tangente y cotangente fuesen negativas como A T' y C R', los diferentes arcos á que estas líneas podrían corresponder, representando por a el arco A H, serian:

$$x = 360^\circ - a + n.\ 180^\circ = 180^\circ\ (2 + n) - a$$

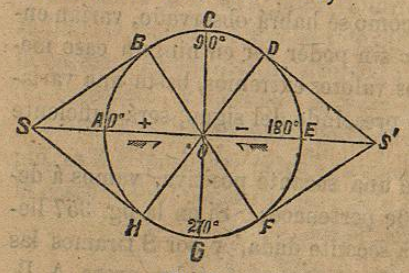
No creemos necesario ocuparnos del caso en que el arco sea negativo, cuyos valores es fácil determinar.

748.—Valores correlativos de la secante.—Dado el arco A B (fig. 357) su secante será S O que consideraremos como positiva al estar medida en la direccion de S á O, y serán negativas las secantes medidas sobre la misma recta S S' en sentido contrario de S' á O.

Si el punto B del arco A B coincidiera con A, éste sería nulo y con-

fundiéndose S con A, la secante S O seria igual al radio; al crecer el arco, la secante tambien creceria siendo positiva, y al llegar el punto B á C, la secante seria infinita por ser S O paralela á la tangente en C. Se ve, pues, que en el 1er. cuadrante, la secante es positiva; que su valor aumenta al crecer el arco; que para 0°sec. = 1, y para 90°sec = $+\infty$.

Al pasar el extremo móvil del arco al 2° cuadrante y llegar, por ejemplo á D, la secante S'O será negativa é irá decreciendo al aumentar el arco hasta llegar á ser igual al radio E O cuando el arco es de 180°. Así, pues, en el 2° cuadrante, la secante es negativa, decrece al aumentar el arco y para 180°, sec. = —1,



(Fig. 357)

En el 3er. cuadrante, la secante S'O es negativa, crece al aumentar el arco A C E F y cuando llega á 270°, la secante será igual á $= -\infty$ por ser paralela S'O á la tangente que pasara por G.

En el 4° cuadrante, la secante vuelve á ser S O positiva; al crecer el arco A C E G H disminuye, y para el arco de 360° será igual á $+1$.

749.—Si el arco es negativo cuando se mide en el sentido A H G F... la secante S O en el 1er. cuadrante negativo A G es positiva, crece con el arco y cuando es de —90° la sec. = $+\infty$. En el 2° cuadrante negativo G E, la secante S'O es negativa, decrece al aumentar el arco y para—180°, sec. = —1. En el 3er. cuadrante negativo E C, la secante S'O es negativa, crece con el arco A G E D y para —270°, sec. = $-\infty$. En el 4° cuadrante negativo la secante S O es positiva, decrece al aumentar el arco A G E C B, y para —360°, sec. = +1. Se ve, pues, que la secante de un arco negativo, tiene signo igual á la que corresponde al arco considerado como positivo, y sufre variaciones idénticas á éste, por lo que

$$\sec\ (-a) = +\sec a.$$

Como si á un arco positivo ó negativo se le agrega una ó varias circunferencias completas, la secante vuelve á tener el mismo valor é igual signo, el arco de 360° será la *amplitud del período de la secante.*

750.—Examinemos la relacion que existe entre una secante y la de *su suplemento.* La secante del arco A C D es S'O, y si tomamos A B = D E suplemento de A C D, tendrémos que por ser los triángulos

S' D O y S B O iguales, S'O será igual á S O, pero de signo contrario, luego:

$$\sec a = -\sec (180° - a)$$

Si á un arco A B se le agregan 180°, resultará el A C E F y como la secante S O de A B es igual en magnitud á la S'O de A C E F, pero de signo contrario, resulta que

$$\sec a = -\sec (180° + a)$$

751.—Los valores de la secante, como se habrá observado, varían entre $+1$ y $+\infty$, y entre -1 y $-\infty$ sin poder ser en ningun caso menores que el radio. Para obtener los valores extremos, basta una variacion en el arco de 0° á 180°, y si se prescinde del signo, será suficiente la de 0 á 90°.

752.—Dada la magnitud S O de una secante positiva, vamos á determinar todos los arcos á que puede pertenecer. Si en la fig. 357 llevamos de O á S la magnitud de la secante dada, y por S tiramos las tangentes S B y S H, dicha secante pertenecerá á los arcos A B, A C E G H y á todos los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°. Si representamos por a el arco A B=A H, por x y x' los variables que pueden tener la misma secante, y por n un número entero cualquiera, que puede ser cero, tendremos:

$$S\,O = \sec x = \sec x'$$

siendo $x = a + n.360°$ $\quad x' = (360° - a) + n.360° = 360(n+1) - a$

Si la secante dada es negativa, la llevaremos de O á S' y tirando las tangentes S' D y S' F, pertenecerá á los arcos A D, A C E F y á los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°. Si representamos por a el arco D E<90°, los arcos á que pertenece la secante negativa tendrán por expresiones:

$x = 180° - a + n.360°$ $\quad x' = 180° + a + n.360°$

ó $x = 180°(2n+1) - a$ $\quad x' = 180°(2n+1) + a$

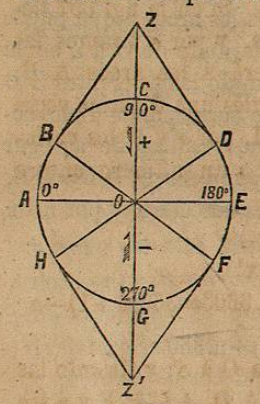
Conocido uno de los arcos á que pertenece una secante, se determinarán todos los demás agregándole á éste, un número par de semi-circunferencias, que es un múltiplo de 360°; pero si se le agrega un número impar de semi-circunferencias, se obtendrán los arcos á que pertenece la misma secante pero con signo contrario.

753.—Valores correlativos de la cosecante.—Dado el arco A B (fig. 358) su *cosecante* será la recta Z O que consideraremos positiva al estar medida de Z á O, y estimaremos como negativas las cosecantes medidas sobre Z Z' de Z' hácia O.

Si suponemos que partiendo de A, se mueve un punto en el sentido de los arcos positivos, éste engendrará todos los arcos positivos imaginables, cuyas cosecantes tratamos de determinar.

Si B coincide con A el arco será nulo, y como la tangente levantada en A es paralela á Z O, la cosecante será infinita; al crecer el arco A B, la cosecante Z O será positiva é irá decreciendo hasta llegar á ser el radio C O cuando el arco sea de 90°. Así, pues, en el primer cuadrante la cosecante es positiva; decrece al aumentar el arco, cuando éste es 0°, cosec=∞, y para 90°, cosec=$+1$.

Al pasar el punto móvil de C, la cosecante del arco A C D, por ejemplo, es Z O positiva, crece al aumentar el arco, y al ser éste de 180°, la cosec=$+\infty$ por ser la tangente levantada en E paralela á Z O.



(Fig. 358)

En el tercer cuadrante, la cosecante Z' O del arco A C E F es negativa, decrece al aumentar el arco, y para 270°, cosec=-1.

En el cuarto cuadrante, la cosecante Z' O del arco A C E G H es negativa, crece al aumentar el arco, y cuando éste llega á ser de 360° su cosec=$-\infty$.

754.—Si el punto móvil recorre la circunferencia en el sentido A H G F.... engendrará los arcos negativos, y en el primer cuadrante A G la cosecante Z' O será negativa, decrecerá al aumentar el arco y para $-90°$ será igual á -1. En el segundo cuadrante *negativo* G E la cosec. Z' O es negativa, crece como el arco y para $-180°$ es igual á $-\infty$. En el tercer cuadrante *negativo* E C, la cosecante Z O es positiva, decrece al aumentar el arco A G E D y para $-270°$ es igual á $+1$. En el cuarto cuadrante tambien es positiva, pero crece al aumentar el arco A G E C B, y para $-360°$ es igual á $+\infty$. Resulta que la cosecante de un arco negativo, tiene signo contrario al que tendría si el arco fuese positivo y experimenta variaciones idénticas, por lo que

$$\text{cosec}(-a) = -\text{cosec}.a$$

Como si á un arco se le agrega 360° una ó varias veces, la cosecante vuelve á tener el mismo valor con igual signo, este arco de 360° *es la amplitud del período de la cosecante.*

755.—Examinaremos la relacion que hay entre la cosecante de un arco y *la de su suplemento*. La cosecante del arco A C D es Z O. Si tomamos A B=D E, suplemento de A C D, la cosecante de A B es la misma recta Z O que la de A C D. Luego, *la cosecante de un arco es igual y del mismo signo que la de su suplemento.*

Si al arco A B le agregamos 180° resultará el A C E F cuya cosecante Z' O será igual á la Z O de A B pero de signo contrario. Luego,

$$\text{cosec.}a = -\text{cosec}\,(180+a)$$

756.—Como se habrá notado, los valores de la cosecante varían entre $+1$ y $+\infty$ y entre -1 y $-\infty$ sin que en ningun caso sean menores que el radio. Para que la cosecante obtenga todos los valores de que es susceptible, basta una variacion en el arco de 90° á 270°, y si no se atiende á los signos, basta que la variacion sea de 0 á 90°.

757.—Vamos, por último, á determinar todos los arcos á que puede pertenecer la misma cosecante positiva O Z. Llevando de O á Z en la fig. 358 la magnitud de la cosecante dada y tirando las tangentes Z B y Z D, se tendrán los arcos A B, y A C D á que corresponde dicha cosecante, pero ademas pertenecerá á todos los que resulten de agregar á estos una ó varias veces 360°. Si representamos por a el arco A B=D E, por x y x' los arcos variables que tienen la misma cosecante y por n un número entero cualquiera, se tiene:

$$Z\,O = \text{cosec}\,x = \text{cosec}\,x'$$

$$x = a + n.360^\circ \qquad x' = (180^\circ - a) + n.360^\circ$$

ó $$x' = 180^\circ(2\,n+1) - a$$

Si la cosecante es negativa, la llevaremos de O á Z', tiraremos las tangentes Z' H y Z' F y la misma cosecante pertenecerá á los arcos A C E G H, A C E F y á todos los que resulten de agregarles una ó varias veces 360°. Llamando a el arco A H=F E=B A, tendrán por expresion los arcos que tienen por cosecante á Z'O:

$$x = (360 - a) + n.360 = 360(n+1) - a$$
$$x' = (180^\circ + a) + n.360^\circ = 180^\circ(2\,n+1) + a$$

Si se conoce uno de los arcos á que pertenece una cosecante, se determinarán todos los demas agregándole un múltiplo cualquiera de 360°, que es un número par de semi-circunferencias; pero si se le agre-

ga un número impar de semi-circunferencias, se obtendrán los arcos que tienen cosecantes de la misma magnitud pero con signo contrario.

No nos ocuparemos del seno y coseno verso por ser líneas trigonométricas de poco uso, haciendo notar solamente que no se consideran como negativas, y que sus límites son 0 y 1.

758.—Arcos complementarios.—Del exámen minucioso que hemos hecho de todos los valores que puedan tener las líneas trigonométricas, al pasar un arco desde $-\infty$ hasta $+\infty$ resulta, que cuando se prescinde de los signos, una línea trigonométrica adquiere todas las magnitudes de que es susceptible cuando el arco cambia de 0° á 90°; pero si ademas de la línea trigonométrica directa, se considera la indirecta que le es correlativa, esto es, la que corresponde á su complemento, bastará la variacion de 0° á 45° para tener todos los valores de cada línea trigonométrica. En efecto, por las definiciones de las líneas trigonométricas indirectas, hemos visto que el coseno de un arco es el seno de su complemento; que la cotangente de un arco es la tangente de su complemento, etc., y recíprocamente. Así, pues,

sen.a=cos.(90°—a)	cos.a=sen.(90°—a)
tang.a=cot.(90°—a)	cot.a=tang.(90°—a)
sec.a=cosec.(90°—a)	cosec.a=sec.(90°—a)
sen.ver.a=cos.ver.(90°—a)	cos.ver.a=sen.ver.(90°—a)

y como por otra parte hemos visto que cuando se busca la línea trigonométrica de un arco $\pm A$ de un gran número de grados, hay siempre un arco $\pm a < 90^\circ$ que tiene la misma línea trigonométrica, resulta que la determinacion de ésta queda reducida á la de arcos menores que 45° cuando se tienen reglas para fijar los signos de las expresadas líneas trigonométricas.

Cuando se consideran arcos de un gran número de grados, los complementos se estiman con respecto á la línea que en nuestras figuras hemos señalado de 90° á 270°, y *se llama complemento de un arco lo que con respecto á un número impar cualquiera de cuadrantes le falta ó le sobra.*

Los suplementos se estiman con respecto á la línea 0°, 180°, y *se llama suplemento de un arco lo que con respecto á un número par de cuadrantes le falta ó le sobra.*

759.—Leyes de las líneas trigonométricas deducidas de sus fórmulas.—En todo lo que antecede hemos determinado los valores y signos de las líneas trigonométricas, observando en la correspondiente

figura cuál es la magnitud y la direccion de la línea que se considera para un arco dado; pero conociendo los valores del seno y coseno para un arco, puede deducirse el de las demas líneas trigonométricas analíticamente, fundándose en las fórmulas generales que hemos demostrado en el número 729.

De las consideraciones geométricas que hemos explicado en los números 733 y 738, resulta que los valores y variaciones del seno y coseno son las que constan en la siguiente tabla:

	Arco de 0°	En el 1er. cuadrante.	Arco de 90°	En el 2° cuadrante.	Arco de 180°	En el 3er. cuadrante.	Arco de 270°	En el 4° cuadrante.
Seno	0	+crece	+1	+decrece	0	—crece	—1	—decrece
Coseno	+1	+decrece	0	—crece	—1	—decrece	0	+crece

Por otra parte, las fórmulas de las otras líneas trigonométricas, son:

$$\text{tang.a} = \frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}},\quad \text{cot.a} = \frac{1}{\text{tang.a}},\quad \text{sec.a} = \frac{1}{\text{cos.a}},\quad \text{cosec.a} = \frac{1}{\text{sen.a}}$$

En consecuencia, el signo de *la tangente* dependerá del que tengan el seno y coseno. En los cuadrantes 1° y 3° en que ambas líneas tienen el mismo signo la tangente es positiva, y negativa en el 2° y 4° en que los signos del seno y coseno son diferentes. Las variaciones de la tangente dependen de las que tengan los términos del quebrado $\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$, y como cuando el seno aumenta el coseno disminuye, y vice-versa, resulta que ambas variaciones cooperan al mismo fin, así es que la tangente seguirá variaciones análogas á las que tiene el seno, que es el numerador de su valor, ó inversas á las del coseno; esto es, crecerá en el 1° y 3er. cuadrante, disminuyendo en el 2° y 4°. Cuando el numerador (el seno) sea 0, tambien lo será el valor de la tangente, y cuando el denominador (el coseno) sea 0, la tangente será infinita. Esto es, será nula cuando el arco sea 0° ó 180°, é infinita cuando sea de 90° ó de 270°.

Respecto de la *cotangente*, siendo su expresion $\frac{1}{\text{tang,a}}$ en la que el numerador es constante y positivo, su signo dependerá y será igual al

de la tangente, siendo positiva en el 1° y 3er. cuadrante, y negativa en el 2° y 4°. Como al crecer la tangente, que es el denominador de la expresion de la cotangente, disminuirá ésta, resulta que las variaciones de *la cotangente* son inversas de las de la tangente, esto es, decrece en el 1° y 3er. cuadrante, y crece en el 2° y 4°. Cuando la tangente es nula en 0° y 180° la cotangente será infinita, y cuando la tangente es ∞ en 90° y 270° la cotangente será 0.

En cuanto á *la secante*, cuya expresion es $\frac{1}{\text{cos.a}}$, su signo será el del coseno siendo positiva en el 1° y 4° cuadrante, y negativa en el 2° y 3°. Las variaciones de la secante serán opuestas á las del coseno, esto es, crecerá en el 1° y 3er. cuadrante, y decrecerá en el 2° y 4°. En los arcos de 0° y 180° en los que el coseno es igual á +1 y á —1 la secante será +1 y —1, y en los arcos de 90° y 270° en los que el coseno es 0 la secante es infinita.

Por último, *la cosecante* cuya expresion es $\frac{1}{\text{sen.a}}$, tendrá el mismo signo que el seno, siendo positiva en el 1° y 2° cuadrantes, y negativa en en el 3° y 4°. Sus variaciones serán inversas de las del seno, que es el denominador de su valor, por lo que decrece en el 1° y 3er. cuadrantes, y crece en el 2° y 4°. Para los arcos de 0° y 180° en los que el seno es nulo, la cosecante es infinita, y para 90° y 270° en los que el seno es +1 y —1 la cosecante es igual á +1 y á —1.

De la fórmula $\text{sen}^2\text{a} + \text{cos}^2\text{a} = 1$

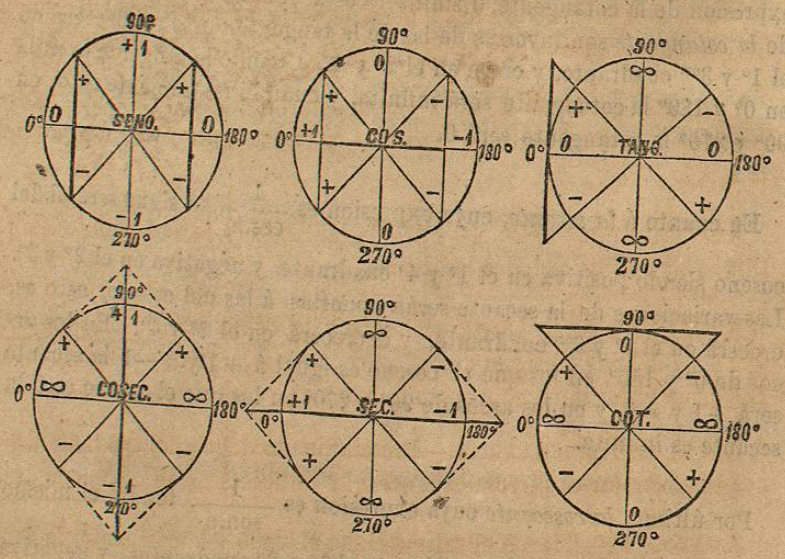
inferimos que cuando el seno aumenta, el coseno disminuye, supuesto que la suma de sus cuadrados es constante, y que el mayor valor de cualquiera de estas líneas es el radio, en razon de que un sumando no puede ser mayor que la suma.

De la fórmula $\text{sen.ver.a} = 1 - \text{cos.a}$

inferimos que el seno verso nunca es negativo, supuesto que el coseno no puede ser mayor que 1.

760.—Representacion de los valores correlativos.—Con el objeto de facilitar á los alumnos que retengan en la memoria los valores

correlativos de las líneas trigonométricas, indicaremos en la fig. 359 los signos que tienen en cada cuadrante, y sus valores al principio y fin de cada uno de ellos.



(Fig. 359)

761.—Leyes de los valores correlativos.—Vamos á procurar cifrar en un corto número de reglas las leyes que hemos observado y que se verifican en los valores de las líneas trigonométricas al pasar un arco *positivo* por sus diversas magnitudes. Consideraremos de cada línea trigonométrica los signos; en qué cuadrante crece y en cuáles decrece; sus valores límites; la amplitud del período; la relacion de las líneas de los arcos suplementarios y complementarios; y por último, haremos notar las analogías que hay entre las variaciones de diversas líneas.

Signos.—Tienen el mismo signo la tangente y la cotangente, el seno y la cosecante, el coseno y la secante. Todas las líneas trigonométricas son positivas en el 1er. cuadrante, y lo son igualmente en el 2º el seno y la cosecante, en el 3º la tangente y la cotangente, y en el 4º el coseno y la secante; siendo negativas en los otros dos cuadrantes.

Variaciones.—Las variaciones en magnitud de todas las líneas son alternativas al pasar de un cuadrante al siguiente. Esto es, si crece en el 1º, decrecerá el 2º, crecerá el 3º y decrecerá en el 4º. Todas *las líneas*

directas, seno, tangente y secante crecen en el 1º y 3er. cuadrante; y *las indirectas*, coseno, cotangente y cosecante, decrecen en el 1º y 3er. cuadrante; experimentando unas y otras variaciones en sentido inverso en los otros cuadrantes.

Valores límites.—El seno y coseno varían de 0 á +1 y á —1. La tangente y la cotangente de $+\infty$ á $-\infty$. La secante y la cosecante del ∞ á ± 1.

Amplitud del período.—Para la tangente y la cotangente es de 180°, y de 360° para todas las demas.

Arcos suplementarios.—El seno y la cosecante de un arco son iguales y del mismo signo que el seno y la cosecante de su suplemento. Las otras líneas son iguales pero tienen signo contrario.

Arcos complementarios.—Prescindiendo del signo, cualquiera línea trigonométrica directa es igual á la indirecta de su complemento.

Analogías.—Tienen el mismo signo el seno y la cosecante, la tangente y la cotangente, el coseno y la secante. En un cuadrante determinado todas las líneas directas crecen ó todas decrecen, mientras que en el mismo cuadrante todas las indirectas experimentan variaciones contrarias. Los valores límites de las líneas directas son iguales á los de sus indirectas.

762.—Terminaremos esta parte poniendo una tabla de los valores correlativos de los arcos y de las líneas trigonométricas, que los estudiantes podrán consultar en caso de duda, y dando la siguiente

Definicion.—*Se entiende por valores correlativos, la dependencia que existe entre el valor de un arco y la magnitud y signo de sus respectivas líneas trigonométricas.*

El estudio de los valores correlativos tiene por objeto observar las variaciones que en el valor de las líneas trigonométricas produce el cambio de magnitud ó de signo del arco, y determinar el arco menor que un cuadrante, cuya línea trigonométrica es igual á la del arco dado.