$$\cot.\tfrac{1}{2}\,a = \cot.a \pm \sqrt{\cot^2 a + 1} \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

$$\text{sen}^2 a = \frac{1 - \cos.2\,a}{2} \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos.2\,a}{2} \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

$$\text{tang}^2 a = \frac{1 - \cos.2\,a}{1 + \cos.2\,a} \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

$$\cot^2 a = \frac{1 + \cos.2\,a}{1 - \cos.2\,a} \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

$$\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

$$\frac{\text{sen.}(a+b)}{\text{sen.}(a-b)} = \frac{\text{tang.}a + \text{tang.}b}{\text{tang.}a - \text{tang.}b} \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

$$\frac{\cos.(a+b)}{\cos.(a-b)} = \frac{\cot.b - \text{tang.}a}{\cot.b + \text{tang.}a} \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

$$\text{sen.}a \cos.b = \tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\,(a+b) + \tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\,(a-b) \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

$$\text{sen.}b \cos.a = \tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\,(a+b) - \tfrac{1}{2}\,\text{sen.}\,(a-b) \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

$$\cos.a \cos.b = \tfrac{1}{2}\cos.\,(a+b) + \tfrac{1}{2}\cos.\,(a-b) \quad \ldots\ldots \quad (57)$$

$$\text{sen.}a\ \text{sen.}b = \tfrac{1}{2}\cos.\,(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos.\,(a+b) \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

$$\text{sen.}p + \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q)\cos.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \quad \ldots\ldots \quad (59)$$

$$\text{sen.}p - \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(p-q)\cos.\tfrac{1}{2}\,(p+q) \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

$$\cos.q + \cos.p = 2\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(p+q)\cos.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

$$\cos.q - \cos.p = 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\,(p-q) \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

$$\text{tang.}a + \text{tang.}b = \frac{\text{sen.}(a+b)}{\cos.a\ \cos.b} \quad \ldots\ldots \quad (63)$$

$$\text{tang.}a - \text{tang.}b = \frac{\text{sen.}(a-b)}{\cos.a\ \cos.b} \quad \ldots\ldots \quad (64)$$

$$\cot.a + \cot.b = \frac{\text{sen.}(b+a)}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b} \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

$$\cot.a - \cot.b = \frac{\text{sen.}(b-a)}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b} \quad \ldots\ldots \quad (66)$$

$$\frac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{\text{sen.}p - \text{sen.}q} = \frac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(p+q)}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(p-q)} \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

$$\frac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{\cos.q + \cos.p} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,(p+q) \quad \ldots\ldots \quad (68)$$

$$\frac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{\cos.q - \cos.p} = \cot.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

$$\frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{\cos.q + \cos.p} = \text{tang.}\tfrac{1}{2}\,(p-q) \quad \ldots\ldots \quad (70)$$

$$\frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{\cos.q - \cos.p} = \cot.\tfrac{1}{2}\,(p+q) \quad \ldots\ldots \quad (71)$$

$$\frac{\cos.q + \cos.p}{\cos.q - \cos.p} = \cot.\tfrac{1}{2}\,(p+q)\ \cot.\tfrac{1}{2}\,(p-q) \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

$$\frac{\text{tang.}a + \text{tang.}b}{\text{tang.}a - \text{tang.}b} = \frac{\text{sen.}(a+b)}{\text{sen.}(a-b)} \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

$$\frac{\cot.a + \cot.b}{\cot.a - \cot.b} = \frac{\text{sen.}(b+a)}{\text{sen.}(b-a)} \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

Demostracion geométrica de algunas fórmulas generales.

779.—Como habrá podido notarse, valiéndonos de las relaciones geométricas en una figura adecuada, hemos establecido las fórmulas llamadas fundamentales y las del seno y coseno de la suma de dos arcos, y en seguida por puros procedimientos algebráicos, hemos deducido todas las demas; resultando que, siendo las primeras ciertas para cualquiera clase de arcos, las últimas, conforme al carácter de los métodos analíticos, tienen la mayor generalidad, interpretando, como lo hemos hecho, el significado de los símbolos algebráicos en los valores correlativos de los arcos y sus líneas trigonométricas. Los métodos de la geometría especial, envuelven casi siempre, en oposicion de los procedimientos analíticos, cierto espíritu de individualidad, lo cual hace que los teoremas demostrados por una figura, no se les puede considerar como ciertos, sino para los casos representados en ella; sin embargo, como los procedimientos geométricos hacen mas perceptibles las verdades, vamos á demostrar geométricamente, algunas de las fórmulas deducidas por el cálculo, lo cual servirá para hacer comprender á los alumnos, la dependencia forzosa que siempre existe entre unos y otros métodos.

y observando que $E\,O^2 - B\,E^2 = B\,O^2 = 1$; que $D\,O^2 - B\,D^2 = B\,O^2 = 1$; que $B\,D = \text{tang.}a$ y que $B\,E = \text{tang.}b$, se tiene:

$$O\,G = \frac{2 - 2\ \text{tang.}a\ \text{tang.}b}{2\ D\,O}$$

suprimiendo el factor 2, $OG = \dfrac{1 - \text{tang.}a\ \text{tang.}\ b}{D\,O}$ ..... (3)

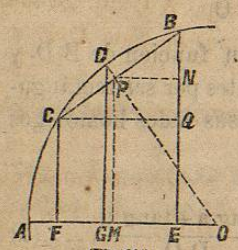
sustituyendo los valores de las ecuaciones (2) y (3) en la (1), resulta finalmente:

$$\text{tang.}\ (a+b) = \frac{\text{tang.}a + \text{tang.}b}{1 - \text{tang.}a\ \text{tang.}b}$$

que es la expresion (20) deducida analíticamente.

783.— *Demostraremos geométricamente las fórmulas siguientes:*

$$\text{sen.}p + \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)$$
$$\text{sen.}p - \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)$$



(Fig. 364)

En la fig. 364 tomemos $A\,B = p$ y $A\,C = q$, cuyos senos serán respectivamente $B\,E$ y $C\,F$. Tiremos la cuerda $C\,B$ y el radio $O\,D$ perpendicular á su mitad. Por el punto P tiremos $P\,M$ perpendicular y $P\,N$ paralela al radio $A\,O$, que como siempre lo supondremos igual á la unidad. Tracemos, por último, $C\,Q$ paralela á $O\,A$. De la inspeccion de la figura resulta:

arco $B\,C = p - q$ $\quad B\,D = \frac{1}{2}\ (p-q)$ $\quad A\,D = A\,B - B\,D = p - \frac{1}{2}\ (p-q)$
$A\,D = \frac{1}{2}\ (p+q)$

$B\,E = \text{sen.}p$, $\quad C\,F = \text{sen.}q$ $\quad D\,G = \text{sen.}\ \frac{1}{2}\ (p+q)$, $\quad B\,P = \text{sen.}\ \frac{1}{2}\ (p-q)$
$O\,G = \cos.\ \frac{1}{2}\ (p+q)$, $\quad O\,P = \cos.\ \frac{1}{2}\ (p-q)$

$$B\,N = \frac{B\,Q}{2} = \frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{2}$$

$$P\,M = B\,E - B\,N = \text{sen.}p - \frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{2} = \frac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{2}$$

Esto supuesto, vamos á determinar los valores de $P\,M$ y $B\,N$, com-

parando con el triángulo $D\,G\,O$ sucesivamente los triángulos $P\,M\,O$ y $B\,N\,P$ que son semejantes á él.

$$PM : PO :: DG : DO \text{ luego } PM = \frac{\text{sen.}p + \text{sen.}q}{2} = \text{sen.}\tfrac{1}{2}(p+q)\cos.\tfrac{1}{2}(p-q)$$

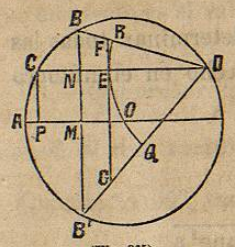
$$BN : BP :: OG : DO \text{ luego } BN = \frac{\text{sen.}p - \text{sen.}q}{2} = \text{sen.}\tfrac{1}{2}(p-q)\cos.\tfrac{1}{2}(p+q)$$

pasando el 2 al 2° miembro en las últimas ecuaciones resulta:

$$\text{sen.}p + \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)$$
$$\text{sen.}p - \text{sen.}q = 2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ (p+q)$$

que es lo que se tenia que demostrar.

784.—Demostrar geométricamente que *la suma de los senos de dos arcos es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los mismos arcos es á la tangente de la semi-diferencia.*



(Fig. 365)

En la fig. 365 sea $A\,B = p$, $A\,C = q$. Si tomamos $A\,B' = A\,B$ y trazamos el seno $C\,P$ y la cuerda $B\,B'$, tendremos:

$B\,M = B'\,M = \text{sen.}p$, $\quad C\,P = N\,M = \text{sen.}q$, $\quad N\,B' = \text{sen.}p + \text{sen.}q$
$B\,N = \text{sen.}p - \text{sen.}q$, el arco $C\,B' = p + q$ y $B\,C = p - q$.

Tiremos por el punto C la recta $C\,D$ paralela á $A\,O$ y haciendo centro en D tracemos un arco de círculo con el radio $D\,E = A\,O = 1$. El ángulo $C\,D\,B'$ tiene por medida el arco $E\,Q$, y por estar su vértice sobre la circunferencia tiene igualmente por medida $\frac{1}{2}\ C\,A\,B'$, luego $E\,Q = \frac{1}{2}\ (p+q)$

Por igual razon $E\,R = \frac{1}{2}\ (p-q)$. Si en el punto E levantamos la tangente $F\,E\,G$, tendremos:

$E\,G = \text{tang.}\ \frac{1}{2}\ (p+q)$, y $E\,F = \text{tang.}\ \frac{1}{2}\ (p-q)$

Por ser paralelas las rectas $B\,B'$ y $F\,G$ quedarán cortadas en partes proporcionales por las líneas $D\,B$, $D\,N$ y $D\,B'$ que parten del punto D (526) y tendremos:

$$NB' : BN :: EG : EF$$

y sustituyendo:

$$\text{sen.}p+\text{sen.}q : \text{sen.}p-\text{sen.}q :: \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(p+q) : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$

que es lo que se queria demostrar, y cuyo principio está expresado en la fórmula (67).

785.—Problemas.—I.—*Conociendo* tang. $\frac{a}{2}$ *determinar todas las demas líneas trigonométricas.*

Hemos visto, fórmula (30) que

$$\text{tang. } 2\,a = \frac{2\ \text{tang. } a}{1-\text{tang}^2 a}$$

Reemplazando *a* por $\frac{1}{2}$ a, se tiene:

$$\text{tang.}a = \frac{2\ \text{tang. } \frac{1}{2}\,a}{1-\text{tang}^2\frac{1}{2}\,a}$$

una vez conocida la tangente de *a*, se podrán determinar todas las demas líneas trigonométricas, como lo hemos hecho en el número 731—III.

II.—*Por medio de la fórmula:*

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a = -\frac{1}{\text{tang.}a} \pm \frac{1}{\text{tang.}a}\sqrt{1+\text{tang}^2 a}$$

determinar la tangente de 30°, *y la de* 45°.

Para que $\frac{1}{2}$ a sea de 30° deberá ser a=60°, y como tangente de 60° es igual á $\sqrt{3}$ sustituyendo en la fórmula y tomando el signo + por tratarse de un arco menor que 90°, se tiene:

$$\text{tang. } 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1+3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

que como hemos visto es el valor de la tangente de 30°.

Para que $\frac{1}{2}$ a sea de 45° necesitaremos hacer a=90° cuya tangente es ∞; pero como en este supuesto el término $\frac{1}{\text{tang.}a}$ se convierte en cero, y por la forma que hemos dado al valor de la tang. $\frac{1}{2}$ a entra como

factor comun de todos los términos $\frac{1}{\text{tang.}a}$, resulta que no podemos hacer la suposicion de que tang.a=∞, sino despues de haber trasformado la expresion

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a = -\frac{1}{\text{tang.}a} \pm \frac{1}{\text{tang.}a}\sqrt{1+\text{tang}^2 a}$$

para lo cual introduciremos dentro del radical á tang.a elevándola al cuadrado; y ejecutando la division, tendremos:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a = -\frac{1}{\text{tang.}a} \pm \sqrt{\frac{1}{\text{tang}^2 a}+1}$$

haciendo ahora a=90° y tang.a=∞, resulta tomando el signo + por tratarse de un arco menor que 90°:

$$\text{tang. } 45° = +1$$

que en efecto es el valor de la tangente de 45°.

III.—*Comprobar la fórmula* tang. 3 a $= \frac{3\ \text{tang.}a - \text{tang.}^3 a}{1-3\ \text{tang.}^2 a}$ *para cuando el arco a*=30°, 45°, 60° y 90°.

Cuando a=30°, tang.a=$\frac{1}{\sqrt{3}}$ Sustituyendo en la fórmula se tiene:

$$\text{tang. } 90° = \frac{3\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1-3\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}}}{1-1} = \infty$$

Cuando a=45°, tang.a=1. Sustituyendo en la fórmula, se tiene:

$$\text{tang. } 135° = \frac{3-1}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

Cuando a=60°, tang.a=$\sqrt{3}$. Sustituyendo en la fórmula, se tiene:

$$\text{tang. } 180° = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3}^3}{1-3\times 3} = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{1-9} = 0$$

Cuando $a=90°$, $\text{tang.}a=\infty$, y para evitar el inconveniente que tendría sustituir este valor en la fórmula

$$\text{tang. } 3\,a=\frac{3\ \text{tang.}a-\text{tang.}^3a}{1-3\ \text{tang.}^2a}$$

lo que haría infinitos todos sus términos, la trasformaremos préviamente; dividiendo el numerador y denominador por tang^3a, lo cual da

$$\text{tang.}3a=\frac{\dfrac{3}{\text{tang}^2a}-1}{\dfrac{1}{\text{tang}^3a}-\dfrac{3}{\text{tang.}a}}$$

y sustituyendo se tiene:

$$\text{tang. } 270°=\frac{\dfrac{3}{\infty}-1}{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{3}{\infty}}=\frac{-1}{-0}=+\infty$$

IV.—*Demostrar que el producto de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo es igual á la suma de las mismas tangentes, y comprobar este teorema cuando el triángulo es equiángulo.*

Si representamos por A, B y C los ángulos de un triángulo, se sabe que

$$A+B+C=180° \qquad \text{luego } A=180°-(B+C)$$

y como la tangente de un ángulo es igual á la de su suplemento tomada con signo contrario, tendremos:

$$\text{tang. } (B+C)=-\text{tang.}A$$

y como (fórmula 20) $\quad \text{tang. } (B+C)=\dfrac{\text{tang.}B+\text{tang.}C}{1-\text{tang.}B\ \text{tang.}C}$

resulta que $\quad \dfrac{\text{tang.}B+\text{tang.}C}{1-\text{tang.}B\ \text{tang.}C}=-\text{tang.}A$

quitando el denominador:

$$\text{tang.}B+\text{tang.}C=-\text{tang.}A+\text{tang.}A\ \text{tang.}B\ \text{tang.}C$$

trasladando:

$$\text{tang.}A+\text{tang.}B+\text{tang.}C=\text{tang.}A\ \text{tang.}B\ \text{tang.}C$$

que es lo que se queria demostrar.

En el caso de ser triángulo equiángulo, cada uno de sus ángulos valdrá 60° y su tangente será igual á $\sqrt{3}$. Sustituyendo este valor en la última ecuacion se tiene:

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$$

ó $\qquad 3\sqrt{3}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$

cuya identidad de resultados comprueba la verdad del teorema.

Cálculo de las tablas trigonométricas.

786.—En las fórmulas que anteceden han quedado cifradas las principales relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas y algunas funciones sencillas de éstas, como las del arco duplo, las del arco de la mitad, etc., que pueden considerarse como otras tantas líneas trigonométricas nuevas; pero por numerosas y variadas qué sean estas relaciones, no pueden aplicarse inmediatamente á nuestro objeto definitivo, que es determinar el valor numérico de los elementos desconocidos de un triángulo, sino sirviéndonos, como magnitudes auxiliares entre los lados y los ángulos de un triángulo, de los valores numéricos de las líneas trigonométricas. Estas, como se habrá notado y se comprenderá mejor mas adelante, llenan las condiciones esenciales de toda magnitud auxiliar; pues por medio de ellas simplificarémos nuestros cálculos, y existiendo una relacion constante entre la magnitud de un arco y la de sus líneas trigonométricas, siempre se puede deducir del valor del arco el de la línea trigonométrica, y recíprocamente; pero para que con su empleo podamos obtener la sencillez y facilidad que buscamos en nuestros cálculos, es indispensable calcular préviamente y construir tablas en las que consten los valores de las líneas trigonométricas ó sus logaritmos al lado de los arcos á que cada una pertenece.

En este capítulo vamos á dar una idea de la manera con que se han

780.—Dados el seno y coseno de un arco determinar el seno y coseno del arco duplo.

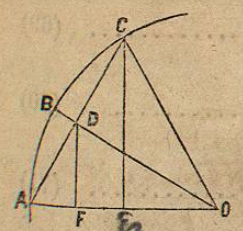


Fig. (361)

Sea en la fig. 361 O A = 1, A B = B C = a, A C = 2 a, A D = sen.a, O D = cos.a, C E = sen.2 a y E O = cos.2 a.

Siendo D F paralela al lado C E del triángulo C A E, y siendo A D = D C, se tendrá E C = 2 D F, y A F = F E. (510) Por tanto,

sen.2 a = C E = 2 D F.....(1)
cos.2 a = E O = O F — A F.....(2)

La cuestion queda reducida á determinar las rectas D F, O F y A F en funcion del seno y coseno de A B. Para esto, considerarémos el triángulo rectángulo A D O que ha quedado dividido en triángulos parciales semejantes á él por la perpendicular D F á la hipotenusa, (530) y se tiene:

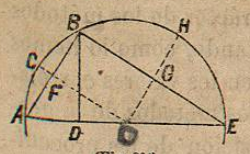
D F : A D :: D O : A O despejando y sustituyendo D F = sen.a cos.a
O F : O D :: O D : A O ,, O F = cos²a
A F : A D :: A D : A O ,, A F = sen²a

Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2) resulta:

sen. 2 a = 2 sen.a cos.a
cos. 2 a = cos²a — sen²a

que son las expresiones (26) y (27) demostradas antes analíticamente.

781.—Encontrar el seno y coseno de la mitad de un arco en funcion del coseno.



(Fig. 362)

En la fig. 362, haremos O A = 1, A B = a, por lo que D O = cos.a es la línea en funcion de la que debemos expresar el seno y coseno de $\frac{a}{2}$

Desde B tiramos las cuerdas B A y B E y los radios O C y O H perpendiculares á sus mitades; tendremos que

B A = 2 A F = 2 sen. $\frac{1}{2}$ a
B E = 2 B G = 2 F O = 2 cos. $\frac{1}{2}$ a

Por otra parte A D = A O — D O = 1 — cos.a
D E = O E + D O = 1 + cos.a

Se sabe (539) que una cuerda es media proporcional entre todo el diámetro y su proyeccion, por lo que

A B² = A E × A D sustituyendo $4\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\,a = 2\,(1 - \cos.a)$

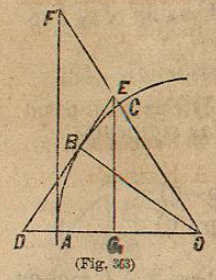
ó $\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1-\cos.a}{2}}$

B E² = A E × D E ,, $4\cos^2\frac{1}{2}\,a = 2\,(1 + \cos.a)$

$\cos.\,\frac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1+\cos.a}{2}}$

que son las expresiones (36) y (37).

782.—Dadas las tangentes de dos arcos *a* y *b* determinar la tangente de su suma.



(Fig. 363)

En la figura 363 tenemos O A = 1, A B = a B C = b, B D = tang.a, B E = tang.b, y A F = tang. (a + b).

Tirando E G paralela á A F, tendremos, comparando los triángulos semejantes F A O y E G O

F A : A O :: E G : G O

luego $\text{F A} = \text{tang.}\,(a+b) = \frac{\text{E G}}{\text{G O}}$.....(1)

Tendremos pues que determinar E G y G O en funcion de B D y B E. Los triángulos D B O y D G E son semejantes por ser rectángulos y tener comun el ángulo en D. Comparando sus lados homólogos se tiene:

E G : D E :: B O : D O luego $\text{E G} = \frac{\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,b}{\text{D O}}$.....(2)

Para determinar el valor de G O, considerarémos el triángulo E D O y conforme al teorema del núm. 534, tendrémos:

$$\text{D E}^2 = \text{E O}^2 + \text{D O}^2 - 2\,\text{D O} \times \text{G O}$$

Despejando á G O se tiene:

$$\text{G O} = \frac{\text{E O}^2 + \text{D O}^2 - \text{D E}^2}{2\,\text{D O}} = \frac{\text{E O}^2 + \text{D O}^2 - (\text{D B} + \text{B E})^2}{2\,\text{D O}}$$

ó $$\text{G O} = \frac{\text{E O}^2 + \text{D O}^2 - \text{D B}^2 - 2\,\text{D B} \times \text{B E} - \text{B E}^2}{2\,\text{D O}}$$