Cuando $a=90°$, $\text{tang.}a=\infty$, y para evitar el inconveniente que tendría sustituir este valor en la fórmula

$$\text{tang. } 3\,a=\frac{3\ \text{tang.}a-\text{tang.}^3a}{1-3\ \text{tang.}^2a}$$

lo que haría infinitos todos sus términos, la trasformaremos préviamente; dividiendo el numerador y denominador por tang^3a, lo cual da

$$\text{tang.}3a=\frac{\dfrac{3}{\text{tang}^2a}-1}{\dfrac{1}{\text{tang}^3a}-\dfrac{3}{\text{tang.}a}}$$

y sustituyendo se tiene:

$$\text{tang. } 270°=\frac{\dfrac{3}{\infty}-1}{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{3}{\infty}}=\frac{-1}{-0}=+\infty$$

IV.—*Demostrar que el producto de las tangentes de los tres ángulos de un triángulo es igual á la suma de las mismas tangentes, y comprobar este teorema cuando el triángulo es equiángulo.*

Si representamos por A, B y C los ángulos de un triángulo, se sabe que

$$A+B+C=180° \qquad \text{luego } A=180°-(B+C)$$

y como la tangente de un ángulo es igual á la de su suplemento tomada con signo contrario, tendremos:

$$\text{tang. } (B+C)=-\text{tang.}A$$

y como (fórmula 20) $\quad \text{tang. } (B+C)=\dfrac{\text{tang.}B+\text{tang.}C}{1-\text{tang.}B\ \text{tang.}C}$

resulta que $\quad \dfrac{\text{tang.}B+\text{tang.}C}{1-\text{tang.}B\ \text{tang.}C}=-\text{tang.}A$

quitando el denominador:

$$\text{tang.}B+\text{tang.}C=-\text{tang.}A+\text{tang.}A\ \text{tang.}B\ \text{tang.}C$$

trasladando:

$$\text{tang.}A+\text{tang.}B+\text{tang.}C=\text{tang.}A\ \text{tang.}B\ \text{tang.}C$$

que es lo que se queria demostrar.

En el caso de ser triángulo equiángulo, cada uno de sus ángulos valdrá 60° y su tangente será igual á $\sqrt{3}$. Sustituyendo este valor en la última ecuacion se tiene:

$$\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$$

ó $\qquad 3\sqrt{3}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$

cuya identidad de resultados comprueba la verdad del teorema.

Cálculo de las tablas trigonométricas.

786.—En las fórmulas que anteceden han quedado cifradas las principales relaciones que existen entre las diversas líneas trigonométricas y algunas funciones sencillas de éstas, como las del arco duplo, las del arco de la mitad, etc., que pueden considerarse como otras tantas líneas trigonométricas nuevas; pero por numerosas y variadas qué sean estas relaciones, no pueden aplicarse inmediatamente á nuestro objeto definitivo, que es determinar el valor numérico de los elementos desconocidos de un triángulo, sino sirviéndonos, como magnitudes auxiliares entre los lados y los ángulos de un triángulo, de los valores numéricos de las líneas trigonométricas. Estas, como se habrá notado y se comprenderá mejor mas adelante, llenan las condiciones esenciales de toda magnitud auxiliar; pues por medio de ellas simplificarémos nuestros cálculos, y existiendo una relacion constante entre la magnitud de un arco y la de sus líneas trigonométricas, siempre se puede deducir del valor del arco el de la línea trigonométrica, y recíprocamente; pero para que con su empleo podamos obtener la sencillez y facilidad que buscamos en nuestros cálculos, es indispensable calcular préviamente y construir tablas en las que consten los valores de las líneas trigonométricas ó sus logaritmos al lado de los arcos á que cada una pertenece.

En este capítulo vamos á dar una idea de la manera con que se han

poniendo por el seno su valor sacado de la expresion $\text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$, se tiene:

$$a > \text{tang.a cos.a}$$

dividiendo por tang.a la primera y la última desigualdad, resulta:

$$\frac{a}{\text{tang.a}} < 1 \text{ y } \frac{a}{\text{tang.a}} > \text{cos.a}$$

cuyas desigualdades hacen ver que *la relacion* $\frac{a}{\text{tang.a}}$, *siempre mayor que* cos.a, *está comprendida entre* 1 *y* cos.a, *y tiene por consiguiente la unidad por límite.*

789.—*La diferencia entre la longitud a del arco y la de su seno, es siempre menor que un cuarto del cubo de a.*

De la desigualdad a<tang.a resulta:

$$\tfrac{1}{2}\,a < \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}\,a}{\text{cos.}\frac{1}{2}\,a}$$

quitando el denominador: $\frac{1}{2}\,a \cos.\frac{1}{2}\,a < \text{sen.}\frac{1}{2}\,a$

segun la fórmula (26) $\quad 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\,a \cos.\frac{1}{2}\,a = \text{sen.a}$

multiplicando esta ecuacion por la desigualdad anterior y suprimiendo el factor comun $\text{sen.}\frac{1}{2}\,a$, se tiene:

$$a \cos^2\tfrac{1}{2}\,a < \text{sen a} \qquad a\,(1-\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a) < \text{sen.a}$$

ó $\quad a - a\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a < \text{sen.a}$

trasladando $\quad a - \text{sen.a} < a\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

por otra parte como $\quad \text{sen.}\tfrac{1}{2}\,a < \frac{a}{2}$

elevando al cuadrado $\quad \text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a < \frac{a^2}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

multiplicando ordenadamente las desigualdades (3) y (4) resulta:

$$\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a\,(a-\text{sen.a}) < \frac{a^3}{4}\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,a$$

suprimiendo el factor $\text{sen}^2\frac{1}{2}a$, tendremos:

$$a - \text{sen.a} < \frac{a^3}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

que es lo que se debia demostrar.

790.—Estos principios van á servir para hacernos ver el grado de aproximacion que podemos obtener al tomar la longitud de un arco pequeño como magnitud de su seno. Consideraremos el arco de 10″ que es la base de las tablas trigonométricas de Callet. La desigualdad (1) da

$$\text{sen.a} < a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

y la (5) da $\quad \text{sen.a} > a - \frac{a^3}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$

Calcularemos la longitud del arco rectificado de 10″. Cuando el radio del círculo es la unidad, la circunferencia$=2\,\pi$ r será $2\,\pi$ y el arco de 180° será igual á $\pi=3'141\ 592\ 653\ 589\ 793\ldots\ldots$ Por otra parte

$$180^\circ = 180 \times 60' \times 60'' = 648000''$$

Por consiguiente 648000″ : 10″ :: 3'141 592 653...: a longitud arco 10″

de donde $\quad a = 0'000\ 048\ 481\ 368\ 110$

sustituyendo este valor en las desigualdades (A) y (B), resulta:

$$\text{sen.}10'' < 0'000\ 048\ 481\ 368\ 110$$
$$\text{sen.}10 > 0'000\ 048\ 481\ 368\ 110 - \frac{a^3}{4}$$

si por a tomamos el valor aproximado 0'000 05, tendremos que

$$\frac{a^3}{4} = 0'000\ 000\ 000\ 000\ 032$$

Sustituyendo y ejecútando la resta indicada en la última desigualdad, se tiene:

$$\text{sen.}10'' > 0'000\ 048\ 481\ 368\ 078$$

y que $\quad \text{sen.}10'' < 0'000\ 048\ 481\ 368\ 110$

Se ve, pues, que el seno de 10″ no comienza á diferir del arco de 10″ sino en la 13ª decimal, no llegando la diferencia ni áun al valor de una

unidad de este órden. En consecuencia, conformándonos con la aproximacion de 12 cifras decimales, vemos que

$$\text{sen.}10'' = 0'000\ 048\ 481\ 368$$

y si determinamos el logaritmo de este número, encontramos que

$$\log.\ \text{sen.}10'' = 5'685\ 5749$$

que es el mismo que consta en la tabla de los logaritmos de las líneas trigonométricas.

Si en la expresion $\cos.a = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$ sustituimos por a el arco de $10''$ tendremos:

$$\cos.10'' = \sqrt{1 - 0'000\ 048\ 481^2} = 0'999\ 999\ 998\ 824\ 8$$

y una vez conocidos los valores numéricos del seno y coseno de $10''$, pueden determinarse los de todos los demas arcos hasta $45°$ por medio de las fórmulas.

$$\text{sen.}2\,a = 2\ \text{sen.}a\ \cos.a$$
$$\cos.2\,a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$
$$\text{sen.}(a+b) = \text{sen.}a\ \cos.b + \text{sen.}b\ \cos.a$$
$$\cos.(a+b) = \cos.a\ \cos.b - \text{sen.}a\ \text{sen.}b$$

Conocidos los valores del seno y coseno de todos los arcos de 10 en $10''$ hasta $45°$, se obtendrían las tangentes y cotangentes por medio de las fórmulas:

$$\text{tang.}a = \frac{\text{sen.}a}{\cos.a} \quad \text{y cot.}a = \frac{\cos.a}{\text{sen.}a}$$

Los valores de las líneas trigonométricas de 45 á $90°$, se determinan fácilmente por ser el valor de cualquiera de ellas, igual al de la indirecta de su complemento.

En la práctica, algo se simplifican los procedimientos que acabamos de explicar; pero no entraremos en los pormenores correspondientes, porque nuestro objeto es dar una idea del modo con que pueden calcularse las tablas trigonométricas y no poner á los alumnos en estado de repetir un trabajo que está ya hecho con la aproximacion que se necesita en la práctica.

Como al efectuar cálculos tan largos y penosos, por una parte es fácil que se deslice una equivocacion, y por otra los errores de aproximacion pueden irse acumulando; conviene calcular directamente el valor

de un gran número de líneas trigonométricas, para tener números que sirvan para rectificar los cálculos hechos. A este fin, se emplean diversos métodos, pero nos limitaremos á citar dos. Pueden calcularse directamente las cuerdas de los arcos correspondientes á polígonos regulares de cualquier número de lados y la mitad del valor de una cuerda será el del seno del arco respectivo; y tambien pueden calcularse las líneas trigonométricas de un gran número de arcos por expresiones análogas á aquellas de que nos hemos servido para fijar el valor de las de $30°$, $45°$ y $60°$. Así se calculan los valores de las líneas trigonométricas de 9 en 9 ó de 3 en $3°$, y se comprueban ó rectifican los ya obtenidos. En cuanto al grado de aproximacion, diremos, que partiendo como se ha dicho del valor del seno de $10''$ con 13 cifras decimales en el límite de los cálculos, para el arco de $45°$, el seno y el coseno difieren del valor exacto menos de $\frac{1}{4}$ de una unidad decimal, del octavo órden. Si se necesitase mayor aproximacion, seria preciso repetir los cálculos, tomando por base de ellos, el arco de $5''$ ó el de $1''$.

Harémos notar, que no todas las líneas trigonométricas dan la misma aproximacion para cualquier valor de los arcos. En efecto, para arcos pequeños, las variaciones del seno son mucho mas rápidas que las del coseno, y por tanto, en la práctica, cuando los ángulos tienen valores que se acercan á $0°$, conviene emplear fórmulas en que entren los senos para tener los resultados con mayor aproximacion, lo cual es causa de la necesidad de trasformar las expresiones obtenidas en funcion del coseno. Lo contrario sucede cuando los ángulos tienen valores cercanos á $90°$.

Por último, diremos que unas veces se construyen las tablas de las líneas trigonométricas refiriendo su longitud al radio tomado por unidad, y entónces se tienen las expresiones llamadas *naturales* de dichas líneas, y otras se construyen las tablas tomando los logaritmos de los valores naturales.

En las tablas de logaritmos de Callet, para evitar el uso de características negativas, se ha tomado el complemento aritmético de ellas, por lo cual al introducir este sistema en los cálculos, segun lo deciamos en la segunda observacion al cálculo de los logaritmos (337), debe tenerse presente que se ha omitido la resta de 10 en cada logaritmo que contiene un complemento aritmético, por lo cual es necesario algunas veces expresar esta operacion sobrentendida, otras es preciso suprimir las decenas de la característica, y otras, por último, es forzoso agregarle las decenas necesarias para que el resultado exprese el complemento aritmético de la característica; procediéndose con los logaritmos de las

líneas trigonométricas lo mismo que lo hemos hecho con los de los números (Prob. IV, VIII, IX, XIII y XVII, § 338).

Puede tambien suponerse el radio dividido en 10,000.000,000 de partes, y en esta hipótesis los logaritmos de las tablas de Callet son los de los números de estas partes del radio que contiene cada una de las líneas trigonométricas; pero por haber sacado todas nuestras fórmulas haciendo el radio igual á la unidad, preferimos adoptar la base de considerar los logaritmos de las líneas trigonométricas como pertenecientes á los números que expresan su magnitud en partes del radio siendo éste 1, habiéndose tomado para los logaritmos del seno y coseno los complementos aritméticos de sus características.

Disposicion y uso de las tablas de las líneas trigonométricas.

791.—Disposicion de las tablas de Callet.—Vamos á describir las tablas de las líneas trigonométricas de Callet. Las correspondientes á la division sexagesimal se encuentran de la página (289) á la (659) divididas en dos partes: en la primera se encuentran los logaritmos del seno y tangente de los cinco primeros grados, y los del coseno y cotangente de 85 á 90° de segundo en segundo; y en la segunda parte, de la página 390 en adelante, constan los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de 0 á 90° de 10 en 10″.

Las tablas en una y otra parte tienen doble entrada, una correspondiente al número de grados inscrito en la cabeza de la página, y otra que pertenece á los grados anotados al pié de la página.

En la primera parte de las tablas se observará que se ha señalado el número de los grados arriba y á la izquierda de cada página, ó abajo y á la derecha; los minutos lo están en una línea horizontal, y los segundos de 0 á 60 están en una columna vertical. Una de las llanas corresponde al seno de los arcos de 0 á 5° y al coseno de 85 á 90°, y la otra á la tangente y cotangente de los mismos grados. Cuando se consideran los grados y minutos puestos en la cabeza de las páginas, es preciso tomar los segundos de la columna de la izquierda, cuya numeracion va de arriba para abajo. Cuando se toman las indicaciones del pié de la página se tomarán los segundos marcados en la columna de la derecha. Por último, desde la página (350) á la (389) sobre las indicaciones de los minutos hay unos números (401, 398, 396, etc.), los cuales expresan las diferencias que generalmente hay entre dos logaritmos inmediatos de los que están en la columna arriba de cada diferencia.

En la segunda parte de las tablas, considerando la entrada superior, los grados están arriba de cada página desde 0° hasta 44°, los minutos están anotados en la primera columna vertical, y los segundos de 10 en 10 en la siguiente. En seguida están los logaritmos del seno, coseno, tangente y cotangente debajo de su respectiva anotacion *sinus*, *co-sin*, *tang*. y *cotang*., habiéndose omitido para abreviar la indicacion de *log*. Ademas, en las columnas de diferencias constan las que se obtienen restando los logaritmos entre los que se encuentran inscritas. Es de notarse que las diferencias de los logaritmos de las tangentes son comunes á las cotangentes, de lo cual es fácil darse la razon. En efecto:

$$\text{tang. } (a+h)=\frac{1}{\text{cot. } (a+h)}$$

$$\text{tang.}a=\frac{1}{\text{cot.}a}$$

Dividiendo una ecuacion por otra, resulta:

$$\frac{\text{tang.}a\ (a+h)}{\text{tang.}a}=\frac{\text{cot.}a}{\text{cot. } (a+h)}$$

y tomando los logaritmos

$$\text{log.tang. } (a+h)-\text{log.tang.}a=\text{log.cot.}a-\text{log.cot. } (a+h)$$

luego cualquiera que sea el valor del arco a y el de la diferencia h, un segundo ó 10″, la diferencia entre los logaritmos de las tangentes será la misma que entre los de las cotangentes de los arcos a y (a+h).

Cuando se consideran ángulos de 45 á 90° están marcados los grados al pié de cada página, los minutos lo están en la primera columna de la derecha, y los segundos de 10 en 10″ yendo la numeracion de abajo para arriba.

Conforme á esta disposicion, consultando las graduaciones superior é inferior, así como los títulos de las líneas trigonométricas, se vé que las tablas de Callet contienen los logaritmos del seno, coseno, tangente y cotangente de todos los arcos de 10 en 10″ de 0 á 90°.

792.—Uso de las tablas trigonométricas.—Los problemas que hay que resolver son dos, semejantes á los que hemos explicado al tratar de los logaritmos de los números: dado un arco, determinar el lo-

formado estas tablas, cuyo trabajo, á semejanza del de los logaritmos, se hace una vez para siempre, y contribuye poderosamente á expeditar las operaciones necesarias para resolver los triángulos.

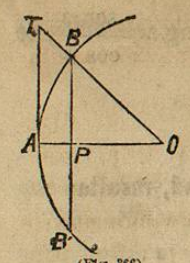
Las magnitudes auxiliares tienen por objeto facilitar las investigaciones, y son de dos clases: unas que se conservan hasta el último resultado, y otras que no constando como datos en el problema, desaparecen en el valor de la incógnita. Por ejemplo: al tratar de los volúmenes de los cuerpos hemos empleado como auxiliar el radio de la esfera para reemplazar á la relacion de los volúmenes la de una expresion de esa línea que se conserva en la exprosion final del volúmen de la esfera. Lo contrario pasa con los logaritmos que son auxiliares intermedios que no constan en los datos del problema, y que sirviendo solo para simplificar los cálculos, desaparecen por completo en el último resultado. Las líneas trigonométricas corresponden á esta última clase de magnitudes auxiliares.

Ahora bien, si por una parte se inscriben todos los arcos de un cuadrante de 10 en 10", y al lado de cada arco se anotan las partes del radio del círculo de que se compone su seno, su coseno, etc., se tendrá una idea de una tabla de las líneas trigonométricas naturales. Generalmente al lado del arco se pone el logaritmo del número de las partes del radio que tiene la línea trigonométrica, y entonces tendremos tablas de los logaritmos de las líneas trigonométricas.

Como hemos visto que por grande que sea un arco, siempre hay otro $<90°$ que tiene las mismas líneas trigonométricas con igual ó diferente signo, es claro que bastará calcular los valores de las que corresponden á un cuadrante. Ademas hemos visto, (731—I) que conocido el seno de un arco por medio de las fórmulas fundamentales (729) pueden determinarse todas las demas líneas trigonométricas; y por último (758), como el seno de un arco es igual al coseno de su complemento, resulta que bastará explicar el modo de obtener el valor de los senos, de los arcos 0° á 45° para comprender como pueden en seguida formarse tablas de todas las líneas de 0° á 90° aplicables á ángulos de cualquiera magnitud.

Esto supuesto vamos á dar una idea del procedimiento que puede emplearse para construir una tabla de los senos y cosenos de todos los arcos de 0° á 45°, demostrando préviamente algunos principios fundamentales.

787.—*A medida que decrece un ángulo menor que 90°, la relacion que hay entre el arco rectificado que le sirve de medida y su seno disminuye, aproximándose más y más á la unidad, que es su valor límite.*



(Fig. 366)

En la fig. 366 sea el radio O A=1, la longitud del arco A B rectificado, la representaremos por a, B P=sen.a, O P=cos.a y A T=tang.a.

Si prolongamos B P hasta B' tendremos que

$$\text{arco } B\,A\,B' > B\,B'$$

y tomando la mitad

$$a > \text{sen.a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Por otra parte, la superficie del sector A O B es menor que la superficie del triángulo A T O, esto es:

$$\tfrac{1}{2}\,A\,O \times a < \tfrac{1}{2}\,A\,O \times A\,T$$

luego $$a < \text{tang.a}$$

ó $$a < \frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

dividiendo las desigualdades (1) y (2) por sen.a, se tiene:

$$\frac{a}{\text{sen.a}} > 1 \text{ y } \frac{a}{\text{sen.a}} < \frac{1}{\text{cos.a}}$$

lo cual hace ver, que la relacion del arco á su seno, está comprendida entre 1 y $\frac{1}{\text{cos.a}}$, cantidad que es mayor que la unidad, porque cos.a es menor que el radio, excepto cuando a=o; pero como á medida que el ángulo a disminuye, el coseno crece y se aproxima á ser igual al radio, $\frac{1}{\text{cos.a}}$ decrece y se acerca más y más á la unidad, de la que puede diferir tan poco como se quiera, y como $\frac{a}{\text{sen.a}}$ es menor que $\frac{1}{\text{cos.a}}$ se infiere que diferirá *áun ménos y que puede considerarse que tiene la unidad por límite.*

788.—*La relacion* $\frac{a}{\text{tang.a}}$ *tiene igualmente, cuando el arco decrece, la unidad por límite.*

Las desigualdades anteriores dan:

$$a < \text{tang.a} \text{ y } a > \text{sen.a}$$