log. (a+h)=log. sen. (a+h)+log.a—log. sen.a.... ...(C)
log. (a+h)=log. tang. (a+h)+log.a—log. tang.a.....(D)

y el valor de (a+h) se determinará por una de estas ecuaciones segun se trate del seno ó de la tangente.

Supongamos que se busca el arco cuyo seno tiene por log. 6·862 53 45 El logaritmo próximo menor en la tabla es 6·861 66 61 que corresponde al arco 0°—2'—30"=150"=a. El logaritmo de *a*, así como el número (a+h) los encontraremos en las tablas de los números, y los demas en las líneas trigonométricas. Sustituyendo en la fórmula (C) calcularemos (a+h) como sigue:

log. sen. (a+h)	=6·862 53 45
log.a=150"	=2'176 09 13
	9·038 62 58
Menos log. sen. 0°—2'—30"	6·861 66 61
	2'176 95 97 =log. 150"'30 02

De una manera análoga procederiamos para una tangente y aun para una cotangente, supuesto que su logaritmo es igual y de signo contrario al de la tangente; pero cuando se trata de determinar un arco muy pequeño por medio de su coseno es imposible hacerlo con precision. Si se quiere, por ejemplo, conocer el arco cuyo coseno tiene por log. 9·999 99 97, las tablas en su segunda parte muestran que el mismo logaritmo pertenece á todos los arcos comprendidos desde 0°—3'—50" hasta 0°—4'—20", lo que quiere decir que el arco pedido, no puede obtenerse sino con una incertidumbre de 40".

4° Caso.—*Cuando el logaritmo de la línea trigonométrica tiene una característica menor que 4 corresponderá á un arco menor que un segundo*, y se procederá como sigue. Se le agregarán á la característica las unidades necesarias para que sea igual ó mayor que 4, y se verá á qué número de segundos corresponde en la primera parte de las tablas de 0 á 5°, y en seguida se dividirá el número de segundos por la unidad seguida de tantos ceros como unidades se agregaron á la característica. Por ejemplo, buscamos el arco cuyo seno tiene por log. 2·862 5345. Agregando 3 unidades á la característica queda 5·862 5345 que corresponde al arco 15"'03, cuyo número habrá que dividirlo por 1000, resultando que

2·862 5345=log. sen. 0"'01503.

795.—Valores naturales de las líneas trigonométricas.—Ya hemos indicado, que cuando la magnitud de una línea trigonométrica, se refiere á la del radio tomado como unidad se obtienen los valores naturales de las líneas trigonométricas, y las tablas de Callet pueden servir para determinarlos, así como para tener el logaritmo de una línea trigonométrica cuando se conoce su valor natural.

1° *Si se trata de determinar el valor natural de la línea trigonométrica de un ángulo dado*, se buscará su logaritmo en las tablas de las líneas trigonométricas; y en seguida, en las tablas de los números se verá á qué número corresponde ese logaritmo.

Por ejemplo, supongamos que se trata de determinar el valor natural del coseno de 60°. En la página (569) encontramos, que el log. correspondiente al coseno de 60°, es de 9·698 97 00. En seguida determinaremos el número á que corresponde. Este será decimal, y siendo 9 la característica, no habrá ningun cero despues de la coma. En la tabla de los números, buscaremos á cuál corresponde la mantiza del logaritmo encontrado; y en la pág. (72) hallamos que pertenece á 50 000. En consecuencia, el coseno natural de 60°, es $0'5=\frac{1}{2}$. Hemos tomado el arco de 60°, con el objeto de que los alumnos vean que el resultado de las tablas es exactamente igual al obtenido en el núm. 731 prob. X.

Aplicando la regla anterior para determinar la tangente de 30°, se encuentra: log. tang. 30°=9·761 4394 página (570), y este log. en las tablas de los números, pág. (85) corresponde 0'577 35.

Luego tang. 30°=0'57 735 del radio.

En el número 731, prob. VIII, encontramos que tang. $30°=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ y para comprobar nuestro resultado, bastará calcular por logaritmos la expresion $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}$ log. 3	=0'238 56 062
Menos log. 3	=0'477 12 125
	9·761 439 37

cuyo log. siendo igual al de tang.30°, es claro que los dos valores serán idénticos.

2° *Si conocido el valor natural de una línea trigonométrica, se quiere determinar su logaritmo*, bastará buscar en las tablas de los números el logaritmo correspondiente al valor natural conocido.

cotangentes dan errores menores que el seno como puede verse comparando la siguiente tabla con la anterior:

5°	20°	40°	45°	50°	70°	85°	89°—40'
0" '004	0" '015	0" '023	0" '024	0" '023	0" '015	0" '004	0" '0003

Por esta razon, en la práctica siempre que sea posible se deberán determinar los ángulos por sus tangentes ó cotangentes, de preferencia al seno ó coseno; cuando esto no sea posible, y los ángulos sean pequeños, debe procurarse usar el seno, y cuando se aproximen á 90° servirse del coseno.

798.—Por último, haremos notar, que no hemos tratado de la secante, de la cosecante, seno verso y coseno verso, porque son líneas cuyo uso es poco frecuente en la práctica. Por lo demas, como

$$\text{sec.a} = \frac{1}{\text{cos.a}} \text{ y } \text{cosec.a} = \frac{1}{\text{sen.a}}$$

conocidos los logaritmos del seno y coseno, es muy fácil determinar los de la cosecante y secante, pues bastará cambiarles signo á los de las primeras líneas y tomar sus complementos aritméticos para tener los de las últimas.

Las expresiones del seno y coseno verso tienen el inconveniente de no ser adecuadas al uso de los logaritmos.

799.—Problemas.—I.—Determinar los logaritmos de las siguientes líneas:

log. del seno de 3°—12'—28"
log. tang. 1°—18'—58"
log. cos. 87°—53'—19"
log. sen. 42°—25'—30"
log. sen. 54°—19'—37" '35
log. cos. 85°—17'—40"
log. cos. 32°—22'—52" '25
log. tang. 59°—30'—30"
log. tang. 37°—45'—48"—36'''
log. cot. 49°—19'—20"
log. cot. 86°—10'—35" '7

II.—Determinar los arcos de las líneas trigonométricas cuyos logaritmos son los siguientes:

9·424 6147 log. sen.
9·978 3800 ,, sen.
9·547 2425 ,, cos.
9·958 7602 ,, cos.
0·804 3941 ,, tang.
9·371 7568 ,, tang.
0·456 2978 ,, cot.
9·229 5384 ,, cot.

UNIVERSIDAD DE NUEVO LEON

III.—Determinar el valor natural de las siguientes líneas:

del seno 32°—15'—20"
del cos. 75°—16'—10"
tang. 63°—18'—12" '3
cot. 22°—25'—30" '48

IV.—Determinar los logaritmos de las siguientes líneas trigonométricas cuyos valores naturales son:

sen. 41°—30'=0'66262
cos. 25°—20'=0'90383
tang. 28°—44'=0'54824
cot. 9°—20'=6'08444

V.—Determinar el número de grados, minutos, etc., de un arco, sabiendo que la secante es igual á 3, y el radio del círculo igual á 2.

Como los tamaños de las líneas trigonométricas se determinan en partes del radio tomando éste por unidad, para resolver el problema comenzamos por determinar el valor de la secante, en el supuesto de que el radio fuera la unidad. En virtud de que las magnitudes de las líneas trigonométricas son proporcionales á los radios, puede formarse esta proporcion: si cuando el radio es 2, la secante es 3; cuando el radio sea 1, la secante será $\frac{3}{2}$.

Entónces el problema se reduce á determinar el valor de un arco conociendo la secante.

Llamando *a* el arco se tiene: $\text{sec.a}=\frac{3}{2}$. Poniendo por sec. su valor $\frac{1}{\text{cos.a}}$ y despejando, resulta:

$$\text{cos.a}=\frac{2}{3}$$

de donde $\qquad \text{log. cos.a}=\text{log.2}-\text{log.3}$

log.2=0'301 03000
log.3=0'477 12125

log. cos.a=9·823 9087=log. cos. 48°—11'—23" arco cuya $\text{sec.}=\frac{3}{2}$

VI.—Determinar el arco cuyo seno verso$=\frac{5}{6}$ siendo el radio $\frac{12}{13}$.

Siendo el sen. ver.=radio menos el coseno, tendremos que

$$\text{el coseno}=\frac{12}{13}-\frac{5}{6}=\frac{72-65}{78}=\frac{7}{78}$$

Determinaremos cuál seria el coseno cuando el radio =1 por la proporcion:

$$\frac{12}{13}:\frac{7}{78}::1:\text{cos.a}=\frac{91}{936}=\frac{7}{72}$$

luego $\qquad \text{log. cos.a}=\text{log.7}-\text{log. 72}$

log. 7=0'845 09804
log. 72=1'857 33250

8'987 76554=log. cos. 84°—25'—15"

que será el arco que tiene $\frac{5}{6}$ por seno verso cuando el radio es $\frac{12}{13}$.

VII.—Determinar los valores límites y correlativos en estos límites

de las líneas trigonométricas, deduciéndolos de las fórmulas fundamentales. (729)

En la fórmula $\qquad \text{sen}^2\text{a}+\text{cos}^2\text{a}=1,$

siendo los sumandos esencialmente positivos y no pudiendo ser uno de ellos mayor que la suma, se infiere: 1° que el seno crece cuando el coseno disminuye y recíprocamente, y 2° que el valor máximo de sen^2a ó de cos^2a será 1, siendo para esto indispensable que la otra línea sea cero.

En este caso $\qquad \text{sen.a}=\pm\sqrt{1}=\pm 1.$

Se ve, pues, que el seno puede ser igual á cero y que sus valores límites son +1 y —1 cuando cos.a=0.

Recíprocamente el coseno puede ser cero y sus valores máximos son +1 y —1 cuando el seno es cero.

Los valores límites y correlativos en estos límites del seno y del coseno, conforme á la fórmula $\text{sen}^2\text{a}+\text{cos}^2\text{a}=1$, son:

para 0° sen.a=0 y cos.a=+1
,, 90° sen.a=+1 cos.a=0
,, 180° sen.a=0 cos.a=—1
,, 270° sen.a=—1 cos.a=0

En la fórmula $\qquad \text{tang.a}=\frac{\text{sen.a}}{\text{cos.a}}$

los valores correlativos
- sen.a=+1, cos.a=0 dan tang. 90°=+∞
- sen.a=0, cos.a=+1 ,, tang. 0°=0
- sen.a=0, cos.a=—1 ,, tang.180°=0
- sen.a=—1, cos.a=0 ,, tang.270°=—∞

La *tangente* varía de 0 á +∞ y á —∞ en razon directa del seno.

En la fórmula $\qquad \text{cot.a}=\frac{1}{\text{tang.a}}$

el valor
- tang.a=+∞ da cot. 90°=0
- tang.a=0 ,, cot. 0°=∞
- tang.a=0 ,, cot.180°=—∞
- tang.a=—∞ ,, cot.270°=0

La *cotangente* varia de 0 á $+\infty$ y á $-\infty$ en razon inversa de la tangente.

En la fórmula $\sec.a = \frac{1}{\cos.a}$

el valor
$$\begin{cases} \cos.a=+1 \text{ da } \sec.\ 0^\circ=+1 \\ \cos.a=0 \quad ,, \ \sec.\ 90^\circ=+\infty \\ \cos.a=0 \quad ,, \ \sec.270^\circ=-\infty \\ \cos.a=-1 \ ,, \ \sec.180^\circ=-1 \end{cases}$$

La *secante* varia de $+1$ á $+\infty$ y de -1 á $-\infty$ en razon inversa del coseno.

En la fórmula $\text{cosec}.a=\frac{1}{\text{sen}.a}$

$$\begin{array}{l} \text{sen}.a=+1 \text{ da cosec. } 90^\circ=+1 \\ \text{sen}.a=0 \quad ,, \text{ cosec. } 0^\circ=+\infty \\ \text{sen}.a=0 \quad ,, \text{ cosec. } 180^\circ=-\infty \\ \text{sen}.a=-1 \ ,, \text{ cosec. } 270^\circ=-1 \end{array}$$

La *cosecante* varia de $+1$ á $+\infty$ y de -1 á $-\infty$ en razon inversa del seno.

En la fórmula $\text{sen. ver}.a=1-\cos.a$

el valor
$$\begin{cases} \cos.a=+1 \text{ da sen. ver. } 0^\circ=0 \\ \cos.a=0 \quad ,, \text{ sen. ver. } 90^\circ=1 \\ \cos.a=0 \quad ,, \text{ sen. ver.}270^\circ=1 \\ \cos.a=-1 \ ,, \text{ sen. ver.}180^\circ=2 \end{cases}$$

El *seno verso* siempre es positivo y varia de 0 á 2.

En la fórmula $\text{cos. ver}.a=1-\text{sen}.a$

el valor
$$\begin{cases} \text{sen}.a=+1 \text{ da cos. ver. } 90^\circ=0 \\ \text{sen}.a=0 \quad ,, \text{ cos. ver. } 0^\circ=1 \\ \text{sen}.a=0 \quad ,, \text{ cos. ver.}180^\circ=1 \\ \text{sen}.a=-1 \ ,, \text{ cos. ver.}270^\circ=2 \end{cases}$$

El *coseno verso* siempre es positivo y varia de 0 á 2.

Procedimientos para hacer adaptables al uso de los logaritmos algunas expresiones.

800.—Para que el cálculo de los logaritmos pueda aplicarse inmediatamente á la determinacion del valor numérico de una expresion, se necesita que en esta no existan ligadas las cantidades por adicion y sustraccion; y en caso de haber términos precedidos de los signos $\pm$ se dice que la fórmula no es calculable por logaritmos. En este caso, para hacer la expresion adaptable al empleo de los logaritmos, se necesita hacer en ella algunas trasformaciones de las que vamos á ocuparnos brevemente.

Cuando se tiene la diferencia de los cuadrados, fundándonos en que ésta es igual á la suma de las cantidades multiplicada por su diferencia (251—III), fácilmente puede hacerse la trasformacion exijida. Por ejemplo:

Si $x=a^2-b^2$

tendremos $x=(a+b)(a-b)$

Igualmente si $\text{sen}.a=\sqrt{1-\cos^2 a}$

tendremos $\text{sen}.a=\sqrt{(1+\cos.a)(1-\cos.a)}$

expresiones adaptables al uso de los logaritmos.

Si se tiene una expresion con la suma ó diferencia de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes, las fórmulas (59) á (66) desde luego trasforman estas sumas y diferencias en expresiones adaptables al uso de los logaritmos. Esas fórmulas pueden reasumirse como sigue:

$$\text{sen}.p\pm\text{sen}.q=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p\pm q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p\mp q)$$

$$\cos.q+\cos.p=2\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p+q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\cos.q-\cos.p=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p+q)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\text{tang}.a\pm\text{tang}.b=\frac{\text{sen}.(a\pm b)}{\cos.a\ \cos.b}$$

Por ejemplo: se busca el log. de la tangente de 23°—32', cuyo valor natural es 0·435504. Como el log. de este número es 9·638 99 22 este será aproximadamente el logaritmo de la tangente de 23°—32'. Decimos aproximadamente, porque en el valor natural solo hemos estimado seis cifras decimales.

796.—Observaciones sobre los logaritmos de las líneas trigonométricas.— Con el fin de evitar el uso de las características negativas en las tablas de Callet, se ha adoptado el método de los complementos aritméticos de estas características; pero á causa de esto, debe tenerse muy presente, al ejecutar operaciones con este sistema de logaritmos, todo lo que dijimos al tratar de los logaritmos de los números (337. II) y lo que hemos explicado en los problemas en que entran esta clase de características; (338, IV, VIII, XIII y XIV), pero es importante fijarse en qué logaritmos corresponden á fracciones decimales y cuáles pertenecen á números enteros, para así saber desde luego en qué casos deberá restarse 10 de la característica, suprimir ó restituir las decenas de estas, ó tomar los logaritmos tales como resulten.

Como los valores de los senos y cosenos varían desde 1 hasta 0, sus logaritmos siempre corresponden á fracciones decimales; y en las características, de sus logaritmos, está sobrentendida la resta de 10. Las tangentes son menores que el radio, desde 0 hasta 45°, y sus logaritmos corresponden á fracciones decimales; pero desde 45° en adelante, como la tangente es mayor que 1, los logaritmos pertenecen á números enteros, y las características que constan en las tablas, son las verdaderas. Las cotangentes por el contrario, son mayores que el radio de cero á 45°, y menores que 1 de 45 á 90°; por lo que los logaritmos de las cotangentes de 0 á 45° corresponden á números enteros, y de 45 á 90° pertenecen á decimales.

797.—Aproximacion que puede obtenerse con las tablas.—Si se examinan las diferencias logarítmicas de las líneas trigonométricas en las tablas de Callet, se notará que son muy considerables para el seno en los arcos pequeños; que varían frecuentemente; que á medida que el arco va creciendo, estas diferencias disminuyen y son constantes para mayor número de arcos hasta llegar á ser nulas al aproximarse á 90°.

La razon de esto, es, que el seno va creciendo de 0 á 90°, y hemos demostrado ya, (337—III) que *la diferencia logarítmica entre dos números consecutivos, disminuye á medida que el valor absoluto de los números aumenta.*

Para el coseno se observan variaciones en sentido inverso, muy pequeñas en los arcos cercanos á cero y grandes en los próximos 90°. Respecto á la tangente y cotangente, sus diferencias logarítmicas siempre son numéricamente mayores que las del seno y tienen variaciones análogas á las de esta línea.

Ahora bien, como mientras mayor es la diferencia logarítmica, tanto más será la aproximacion que podemos obtener empleando los logaritmos de las líneas á que pertenecen: el exámen de esas variaciones es de la mayor importancia para la práctica.

Si nos fijamos por ejemplo en el arco de 2°, veremos en la pág. (402) de las tablas, que la diferencia logarítmica del seno de 2° y de 2°—0'—10" es 6025. En consecuencia, si 6025 diferencia entre los logaritmos de los senos corresponde á una de 10" en el arco, cuando la diferencia entre los logaritmos sea una unidad de 7° órden, la diferencia entre los arcos la determinaremos por la siguiente proporcion:

$$6025 : 1 :: 10'' : x = 0'' \text{ '0017}$$

Así, pues, usando los logaritmos de Callet en arcos próximos á 2° por medio del seno podremos obtener la aproximacion de 0" '0017.

Para el coseno, la diferencia es de 8. Por tanto,

$$8 : 1 :: 10'' : x = 1'' \text{ '25}$$

y la aproximacion sirviéndonos del coseno, será de 1" '25, esto es, 735 veces menor que con el seno.

Siendo la diferencia logarítmica para la tangente y cotangente 6033 un cálculo idéntico conduce á que estas líneas dan una aproximacion un poco mayor que el seno.

Calculando la aproximacion que produce la variacion de una unidad de 7° órden en la mantiza del logaritmo del seno en arcos de diversas magnitudes, estableciendo y resolviendo en cada caso una proporcion como acabamos de hacerlo, se obtiene la siguiente tabla:

5°	20°	40°	45°	50°	70°	85°	89°–40'
0" '004	0" '017	0" '040	0" '047	0" '057	0" '125	0" '526	5" '000

Así, pues, los ángulos próximos á 90° quedarán muy mal determinados por sus senos; y de la misma manera los ángulos pequeños se obtienen con muy poca exactitud por medio del coseno. Las tangentes y