La *cotangente* varia de 0 á $+\infty$ y á $-\infty$ en razon inversa de la tangente.

En la fórmula $\sec.a = \frac{1}{\cos.a}$

el valor
$$\begin{cases} \cos.a=+1 \text{ da } \sec.\ 0^\circ=+1 \\ \cos.a=0 \quad ,, \ \sec.\ 90^\circ=+\infty \\ \cos.a=0 \quad ,, \ \sec.270^\circ=-\infty \\ \cos.a=-1 \ ,, \ \sec.180^\circ=-1 \end{cases}$$

La *secante* varia de $+1$ á $+\infty$ y de -1 á $-\infty$ en razon inversa del coseno.

En la fórmula $\text{cosec}.a=\frac{1}{\text{sen}.a}$

$$\begin{array}{l} \text{sen}.a=+1 \text{ da cosec. } 90^\circ=+1 \\ \text{sen}.a=0 \quad ,, \text{ cosec. } 0^\circ=+\infty \\ \text{sen}.a=0 \quad ,, \text{ cosec. } 180^\circ=-\infty \\ \text{sen}.a=-1 \ ,, \text{ cosec. } 270^\circ=-1 \end{array}$$

La *cosecante* varia de $+1$ á $+\infty$ y de -1 á $-\infty$ en razon inversa del seno.

En la fórmula $\text{sen. ver}.a=1-\cos.a$

el valor
$$\begin{cases} \cos.a=+1 \text{ da sen. ver. } 0^\circ=0 \\ \cos.a=0 \quad ,, \text{ sen. ver. } 90^\circ=1 \\ \cos.a=0 \quad ,, \text{ sen. ver.}270^\circ=1 \\ \cos.a=-1 \ ,, \text{ sen. ver.}180^\circ=2 \end{cases}$$

El *seno verso* siempre es positivo y varia de 0 á 2.

En la fórmula $\text{cos. ver}.a=1-\text{sen}.a$

el valor
$$\begin{cases} \text{sen}.a=+1 \text{ da cos. ver. } 90^\circ=0 \\ \text{sen}.a=0 \quad ,, \text{ cos. ver. } 0^\circ=1 \\ \text{sen}.a=0 \quad ,, \text{ cos. ver.}180^\circ=1 \\ \text{sen}.a=-1 \ ,, \text{ cos. ver.}270^\circ=2 \end{cases}$$

El *coseno verso* siempre es positivo y varia de 0 á 2.

Procedimientos para hacer adaptables al uso de los logaritmos algunas expresiones.

800.—Para que el cálculo de los logaritmos pueda aplicarse inmediatamente á la determinacion del valor numérico de una expresion, se necesita que en esta no existan ligadas las cantidades por adicion y sustraccion; y en caso de haber términos precedidos de los signos $\pm$ se dice que la fórmula no es calculable por logaritmos. En este caso, para hacer la expresion adaptable al empleo de los logaritmos, se necesita hacer en ella algunas trasformaciones de las que vamos á ocuparnos brevemente.

Cuando se tiene la diferencia de los cuadrados, fundándonos en que ésta es igual á la suma de las cantidades multiplicada por su diferencia (251—III), fácilmente puede hacerse la trasformacion exijida. Por ejemplo:

Si $x=a^2-b^2$

tendremos $x=(a+b)(a-b)$

Igualmente si $\text{sen}.a=\sqrt{1-\cos^2 a}$

tendremos $\text{sen}.a=\sqrt{(1+\cos.a)(1-\cos.a)}$

expresiones adaptables al uso de los logaritmos.

Si se tiene una expresion con la suma ó diferencia de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes, las fórmulas (59) á (66) desde luego trasforman estas sumas y diferencias en expresiones adaptables al uso de los logaritmos. Esas fórmulas pueden reasumirse como sigue:

$$\text{sen}.p\pm\text{sen}.q=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p\pm q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p\mp q)$$

$$\cos.q+\cos.p=2\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p+q)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\cos.q-\cos.p=2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p+q)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\text{tang}.a\pm\text{tang}.b=\frac{\text{sen}.(a\pm b)}{\cos.a\ \cos.b}$$

$$\cot.a \pm \cot.b = \frac{\text{sen.}(b \pm a)}{\text{sen.}a\ \text{sen.}b}$$

801.—Consideremos ahora el caso más general cifrado en una expresion binomia:

$$x = a \pm b$$

en la que se busca el logaritmo de x, conociendo los logaritmos de los números positivos a y b.

Sacando a como factor comun: $x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$

Esto supuesto, introduzcamos un arco auxiliar φ cuya magnitud se fijará por la condicion de que se tenga:

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

este arco φ, comprendido entre cero y 90° se calculará por logaritmos, por la fórmula:

$$\log.\ \text{tang.}\ \varphi = \log.\ b - \log.\ a$$

El valor de x se trasforma en

$$x = a(1 \pm \text{tang.}\varphi) = a\left(1 \pm \frac{\text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi}\right) = a\frac{\cos.\varphi \pm \text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi} \ldots\ldots\ldots (2)$$

pero se tiene:

$$\cos.\varphi \pm \text{sen.}\varphi = \cos.\varphi \pm \cos.(90° - \varphi)$$

conforme á las fórmulas (61) y (62) se tiene:

$$\begin{aligned}\cos.\varphi + \cos.(90° - \varphi) &= 2\cos.\tfrac{1}{2}(90° - \varphi + \varphi)\cos.\tfrac{1}{2}(90° - \varphi - \varphi)\\ &= 2\cos.45°\cos.(45° - \varphi)\\ \cos.\varphi - \cos.(90° - \varphi) &= 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(90° - \varphi + \varphi)\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}(90° - \varphi - \varphi)\\ &= 2\,\text{sen.}45°\,\text{sen.}(45° - \varphi)\\ &= 2\cos.45°\cos.(45° + \varphi)\end{aligned}$$

luego $\cos.\varphi \pm \text{sen.}\varphi = 2\cos.45°\cos.(45° \mp \varphi)$

sustituyendo este valor en la ecuacion (2), se tiene:

$$x = \frac{a.\ 2\cos.45°\cos.(45° \mp \varphi)}{\cos.\varphi}$$

Sustituyendo por cos. 45° su valor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (731—IX)

$$x = \frac{a.\sqrt{2}\cos.(45° \mp \varphi)}{\cos.\varphi} \ldots\ldots\ldots (3)$$

cuya expresion puede calcularse por logaritmos, como sigue:

$$\log.\ x = \log.a + \tfrac{1}{2}\log.\ 2 + \log.\cos.(45° \mp \varphi) - \log.\cos.\varphi$$

El mismo método puede aplicarse á una expresion polinomia cualquiera $a \pm b \pm c \pm d \ldots$; pues, en efecto, se podrá con el empleo de un arco auxiliar reducir una unidad el número de los términos del polinomio, con un segundo arco auxiliar se disminuirá este número otra unidad, y continuando así se lograria trasformarla en un monomio.

802.—Indicaremos otro método que puede emplearse para hacer adaptable al uso de los logaritmos una expresion binomia.

Supongamos que esta es de la forma:

$$x = a + b$$

sacando a como factor $x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$

tomaremos un arco auxiliar de modo que

$$\text{tang}^2\varphi = \frac{b}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

expresion propia para el uso de los logaritmos.

Sustituyendo $x = a(1 + \text{tang}^2\varphi) = a(\sec^2\varphi)$

ó definitivamente $x = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$ ..... (5)

expresion igualmente adaptable para el empleo de los logaritmos.

Si se tiene $x = a - b$

tomariamos un arco auxiliar φ de modo que se tenga:

$$\text{sen}^2\varphi = \frac{b}{a} \text{ ..... (6)}$$

ó bien

$$b = a \text{ sen}^2\varphi$$

sustituyendo se tiene: $x = a - a \text{ sen}^2\varphi = a(1 - \text{sen}^2\varphi)$

ó por último $x = a \cos^2\varphi$ ..... (7)

fórmula propia para el uso de los logaritmos.

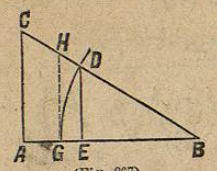
Resolucion de los triángulos rectángulos.

803.—Vamos á tratar ahora de la resolucion de los triángulos, comenzando por los rectángulos. Como ya lo hemos dicho, la resolucion de un triángulo tiene por objeto determinar los elementos desconocidos, cuando para ello hay los datos necesarios, y por regla general son datos suficientes tres elementos, cuando uno de ellos es un lado.

A fin de facilitar el uso de nuestras fórmulas, y evitar estar repitiendo la representacion algebraica de los elementos de los triángulos, convendremos en indicar los ángulos por las letras mayúsculas A, B y C, y los lados respectivamente opuestos á cada ángulo por las minúsculas *a*, *b* y *c*. Ademas, en el caso de ser rectángulo el triángulo, constantemente representaremos el ángulo recto por A, y la hipotenusa por *a*.

Esto supuesto, comenzaremos por establecer y demostrar los principios que sirven de fundamento á la resolucion de los triángulos rectángulos.

804.—Principios fundamentales.—Sea el triángulo rectángulo A B C (fig. 367), y haciendo centro en uno de los vértices B de los ángulos agudos con un radio B G igual al de las tablas, tracemos el arco G D. En seguida bajemos la recta D F perpendicular á A B, que será el seno del ángulo B, y levantando la perpendicular G H, esta será la tangente del mismo ángulo. Por ser A C, G H y D F perpendiculares á A B, serán semejantes los triángulos B A C, B G H y B F D. Así, pues, se tiene:



(Fig. 367)

La hipotenusa B C=a, A C=b, A B=c, B G=B D=r, D F=sen.B. B F=cos.B y G H=tang.B.

Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes, resultan las siguientes proporciones:

BC : BD :: AC : DF sustituyendo a : r :: b : sen.B de la que $b = \frac{a \text{ sen. } B}{r}$

BC : BD :: AB : BF ,, a : r :: c : cos.B ,, $c = \frac{a \cos. B}{r}$

AB : AC :: BG : GH ,, c : b :: r : tang.B ,, $b = \frac{c \text{ tang.} B}{r}$

Estas tres proporciones son la expresion de los tres principios siguientes:

1°—*La hipotenusa es al radio, como un lado es al seno del ángulo opuesto.*

2°—*La hipotenusa es al radio, como un lado es al coseno del ángulo adyacente.*

3°—*Un lado es á otro lado, como el radio es á la tangente del ángulo opuesto al segundo lado comparado.*

Estos tres teoremas, ó las fórmulas que de ellos se derivan, sirven de fundamento á la resolucion de los triángulos rectángulos, unidos á los teoremas demostrados en geometría, y que son: la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180°, y el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

Así, pues, haciendo el radio igual á la unidad en las tres últimas ecuaciones, y expresando analíticamente los teoremas de geometría, tendremos las siguientes fórmulas para la resolucion de los triángulos rectángulos: