Una vez conocidos los segmentos resolviendo los triángulos rectángulos A B D y C B D por medio de la fórmula (B) se determinarán los ángulos

$$\cos. A=\frac{x}{c} \qquad \cos. B\,C\,D=\frac{y}{a} \qquad B\,C\,A=180^\circ-B\,C\,D \text{ y } B=B\,C\,D-A$$

Se debe tener presente, que *bajando la perpendicular desde el vértice opuesto al lado mayor caerá siempre dentro del triángulo, y que el segmento mayor* x *es el adyacente al mayor lado,* por ser su proyeccion.

El primer procedimiento es preferible al segundo, porque los ángulos están dados por una tangente, y porque se tiene la comprobacion de los cálculos viendo si $A+B+C=180^\circ$.

816.—Rectificacion de los datos y de los resultados.—Lo mismo que indicamos al tratar de los triángulos rectángulos (806), es conveniente en los oblicuángulos examinar si los datos no envuelven algun absurdo, y comprobar los resultados de los cálculos. Para el primer objeto, hemos dicho que debe tenerse presente que un lado cualquiera sea menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia; que al lado mayor esté opuesto el mayor ángulo y recíprocamente; y que la suma de los tres sea de 180°. Para comprobar los cálculos hemos indicado que los del tercer caso, cuando se emplea el segundo procedimiento, y los del cuarto se rectifican fácilmente viendo si la suma de los tres ángulos encontrados da 180°. Respecto al primer caso, al segundo y al tercero, cuando se usa el primer procedimiento, lo mejor es suponer como datos las incógnitas y calcular los otros elementos del triángulo que deben resultar iguales á las cantidades conocidas. Generalmente la rectificacion se limita á buscar el valor de uno solo de los elementos empleando un método diferente.

Por ejemplo, en el primer caso conociendo A, B, y *a*, se ha encontrado el valor de C, *b* y *c*; pues bien: como rectificacion bastará buscar el valor de C en funcion de a, b y c por medio de la fórmula (P).

817.—Fórmula fundamental.—Podemos considerar la fórmula (G) en que quedó cifrado el segundo principio (808) como fundamental para la resolucion de los triángulos oblicuángulos. En efecto, hemos visto que partiendo de la fórmula

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos. A$$

hemos resuelto el tercer caso empleando el segundo procedimiento y el cuarto caso.

Vamos ahora á deducir de la misma fórmula los principios 1°, 3° y

4° del párrafo 808, que nos han servido para resolver todos los casos, y cuyos principios quedaron cifrados en las fórmulas:

$$\frac{a}{\text{sen.}A}=\frac{b}{\text{sen.}B}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(F)}$$

$$a+b : a-b :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)\ldots\ldots\ldots \text{(H)}$$

y

$$b : c+a :: c-a : x\pm y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(J)}$$

1°—Despejando á cos. A, de la fórmula fundamental

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos. A$$

se tiene:

$$\cos. A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$$

Sustituyendo este valor en la expresion $\text{sen}^2 a=1-\cos^2 a$, tendremos:

$$\text{sen}^2 a=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}\right)^2=\frac{4\,b^2\,c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4\,b^2\,c^2}$$

Si elevamos al cuadrado el trinomio $(b^2+c^2-a^2)$ multiplicándolo por sí mismo nos resulta:

$$(b^2+c^2-a^2)^2=a^4+b^4+c^4-2\,a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2$$

sustituyendo en la expresion de $\text{sen}^2 A$ y cambiando signos para ejecutar la resta de las cantidades que quedan dentro del paréntesis, se tiene:

$$\text{sen}^2 A=\frac{4\,b^2\,c^2-a^4-b^4-c^4+2\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2-2\,b^2\,c^2}{4\,b^2\,c^2}$$

Haciendo la reduccion de los términos $4\,b^2\,c^2-2\,b^2\,c^2$ y dividiendo los dos miembros de la ecuacion por a^2, resulta:

$$\frac{\text{sen}^2 A}{a^2}=\frac{-a^4-b^4-c^4+2\,a^2\,b^2+2\,a^2\,c^2+2\,b^2\,c^2}{4\,a^2\,b^2\,c^2}\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\cot.\tfrac{1}{2}(A+B)\cot.\tfrac{1}{2}(A-B)\cot^2\tfrac{1}{2}C\ldots\ldots\ldots(8)$$

Como $A+B+C=180°$; $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{1}{2}C$, y por tanto:

$$\cot.\tfrac{1}{2}C=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)$$

sustituyendo este valor en la ecuacion (8) y los de las cotangentes en funcion de las tangentes:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tang.}^2\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B)\,\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)}$$

y simplificando resulta por último:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)}$$

que es la expresion del 3er. principio que nos propusimos deducir.

4°—Vamos á sacar finalmente el 4° principio (808) cifrado en la proporcion

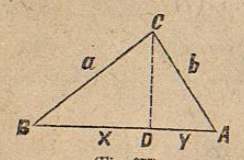
$$c : a+b :: a-b : x-y$$

de la ecuacion $a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A$

Trasladando b^2 $a^2-b^2=c^2-2\,b\,c.\cos.A$

reemplazando la diferencia de los cuadrados, y sacando c como factor comun:

$$(a+b)(a-b)=c\,(c-b\cos.A-b\cos.A)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$



(Fig. 375)

En el triángulo rectángulo C D A (fig. 375) se tiene: (B)

$$y=b.\cos.A$$

$$x=BA-DA=c-y$$

$$x=c-b\cos.A$$

Sustituyendo los valores de $c-b\cos.A$ y de $b.\cos.A$ en la ecuacion (1) resulta:

$$(a+b)(a-b)=c\,(x-y)$$

formando una proporcion con estos cuatro factores, se obtiene:

$$c : a+b :: a-b : x-y$$

que es lo que se queria demostrar.

818.—Deduccion de las fórmulas de los triángulos rectángulos.—Siendo, como son, los triángulos rectángulos un caso particular de los triángulos oblicuángulos, naturalmente es muy sencillo deducir de las fórmulas que nos han servido para resolver los triángulos oblicuángulos las que establecimos para los rectángulos: pero, por ejercicio las sacaremos directamente de la fórmula (G) introduciendo en ella las condiciones de los triángulos rectángulos. Esto es,

$$A=90°,\quad B=90°-C,\quad \cos.A=0,\ \text{etc.}$$

Si en la fórmula (G) $a^2=b^2+c^2-2\,b\,c.\cos.A$

sustituimos $\cos.A=0$

resulta: $a^2=b^2+c^2$, comprobacion de la.....(E)

Decimos que comprobamos esta fórmula, y no que la deducimos, porque en geometría nos fundamos en ella para establecer el teorema que sirve de base á la fórmula (G).

Para deducir la expresion $b=a.\,\text{sen.}B$ de los triángulos rectángulos, de la fórmula:

$$c^2=a^2+b^2-2\,ab.\cos.C$$

eliminaremos a^2 y $\cos.C$ sustituyendo sus valores:

$$a^2=b^2+c^2$$

$$\cos.C=\cos.(90°-B)=\text{sen.}B$$

con lo que se tendrá:

$$c^2=2\,b^2+c^2-2\,ab.\,\text{sen.}B$$

suprimiendo c^2 y dividiendo por 2 b, resulta finalmente:

$$b = a.\ \text{sen.}\ B \ldots \text{ fórmula} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Para deducir la expresion c=a. cos.B de los triángulos rectángulos, en la fórmula

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c.\ \cos.B$$

eliminaremos á a^2 sustituyendo su valor

$$a^2 = b^2 + c^2$$

lo que da $$b^2 = b^2 + 2\ c^2 - 2\ a\ c.\ \cos.B$$

suprimiendo b^2 y dividiendo por $2c$, resulta:

$$c = a.\ \cos.B \ldots \text{fórmula} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Deduciremos la expresion: b=c. tang.B, dividiendo la ecuacion (A) por la (B), lo cual da:

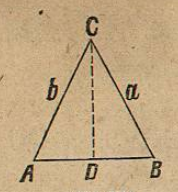
$$\frac{b}{c} = \frac{\text{sen.}B}{\cos.\ B}$$

ó $$b = c\ \text{tang.}B, \text{ que es la fórmula} \ldots (C)$$

819.—Fórmulas para la resolucion de los triángulos isósceles.—Igualmente es fácil deducir de las fórmulas generales de los triángulos oblicuángulos las correspondientes al caso en que el triángulo sea isósceles, cuya circunstancia estará indicada por la doble condicion de que A=B y a=b; pero vamos á indicar otro procedimiento mucho mas sencillo que puede seguirse para resolver los triángulos isósceles, y el cual consiste en descomponerlos préviamente en dos triángulos rectángulos iguales, y resolver estos en seguida.

1er. *Caso.*—Dados A, B y *a*, determinar los demas elementos.

Por ser el triángulo isósceles, siendo A=B, se tiene a=b.



(Fig. 376)

En la fig. 376, el ángulo D C A=$\frac{1}{2}$ C=90°—A y

$$A\ D = \tfrac{1}{2}\ c = b\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\ C$$

2º *Caso.*—Dados *a*, *b* y A, determinar los demas elementos.

Por ser isósceles el triángulo, se tendrá B=A

$$\tfrac{1}{2}\ C = 90° - A$$
$$\tfrac{1}{2}\ c = b\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\ C$$

y como ántes

3er. *Caso.*—Dados *a*, *b* y C, determinar los demas elementos (fig. 376).

$$A = B = 90° - \tfrac{1}{2}\ C$$
$$\tfrac{1}{2}\ c = b\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}\ C$$

4º *Caso.*—Dados *a*, *b* y *c*, determinar los tres ángulos.

Considerando el triángulo rectángulo A D C (fig. 376) de la fórmula (A), resulta:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C = \frac{\frac{1}{2}\ c}{b}$$

Una vez conocido C, se tiene: A=B=90°—$\frac{1}{2}$ C

820.—Antes de ocuparnos de los problemas numéricos relativos á la resolucion de los triángulos oblicuángulos, pondremos la siguiente

19-21

Tabla de las fórmulas para la resolucion de los triángulos.

Triángulos rectángulos:

b=a sen.B	c=a sen.C	(A)
b=a cos.C	c=a cos.B	(B)
b=c tang.B	c=b tang.C	(C)
B=90°—C	C=90°—B	(D)
$a^2 = b^2 + c^2$		(E)

Triángulos oblicuángulos:

$$\frac{a}{\text{sen.}A} = \frac{b}{\text{sen.}B} = \frac{c}{\text{sen.}C} \ldots\ldots (F)$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc.\cos.A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac.\cos.B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab.\cos.C$ .. (G)

$a + b : a - b :: \text{tang.}\frac{1}{2}\ (A + B) : \text{tang.}\frac{1}{2}\ (A - B)$ .... (H)

fig. 370 $b : c + a :: c - a : A\ D - D\ C$ .... (I)

fig. 371 $b : c + a :: c - a : A\ D + D\ C$ .... (J)

$A + B + C = 180°$ .... (K)

Para el tercer caso $\text{tang.}\varphi = \frac{a+b}{a-b}\,\text{tang.}\frac{1}{2}\,C$ .....(L)

$$c = \frac{(a-b)\cos.\frac{1}{2}\,C}{\cos.\varphi} \quad \text{.....(M)}$$

Para el cuarto caso
$p = \frac{1}{2}\,[a+b+c]$

$$\cos.\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}} \quad \text{.....(N)}$$

$$\text{sen.}\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}} \quad \text{.....(O)}$$

$$\text{tang.}\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,[p-a]}} \quad \text{.....(P)}$$

Para los triángulos isósceles, siendo:

$A=B$ y $a=b$, se tendrá: $\frac{1}{2}\,C=90^\circ-A$ y $\frac{1}{2}\,c=b\,\text{sen.}\frac{1}{2}\,C$

821.—Problemas.—I.—*Resolver un triángulo oblicuángulo en el que se conocen dos ángulos y un lado,* cuyos valores son:

$a=9849^{m}{}'73$
$B=49^\circ-18'-19''\ '34$
$C=95^\circ-14'-49''\ '75$

Comenzaremos por determinar A, cuyo valor es: $A=180^\circ-(B+C)$

Cálculo de A.	Cálculo de b.	Cálculo de c.
$B=49^\circ-18'-19''\ '34$	$b=\frac{a\ \text{sen.}\ B}{\text{sen.}A}$	$c=\frac{a\ \text{sen.}\ C}{\text{sen.}A}$
$C=95^\circ-14-49\ '75$		
$144-33-9\ '09$	log.a = 3'993 4244	log.a = 3'993 4244
$180-0-0\ '00$	log.sen.B = 9·879 7812	log.sen.C = 9·998 1762
$A=35^\circ-26'-50''\ '91$	13.873 2056	13'991 6006
	log.sen.A = 9·763 3953	log.sen.A = 9·763 3953
	log.b = 4'109 8103	log.c = 4'228 2053
	$b=12876^{m}{}'869$	$=16912^{m}{}'401$

Como comprobacion calcularemos el lado *a* conociendo A, B y b.

$A=35^\circ-26'-50''\ '91$
$B=49\ -18-19\ '34$
$b=12876^{m}{}'869$

El valor de *a* se tendrá por la fórmula: $a=\frac{b.\text{sen.}A}{\text{sen.}B}$

Cálculo de a.

log.b 4'109 8103
log.sen.A = 9·763 3953

13'873 2056
log.sen.B 9·879 7812

log.a = 3'993 4244 de donde $a=9849^{m}{}'73$ que es el valor que teniamos ántes como dato.

II.—*Resolver un triángulo oblicuángulo en el que se conocen dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.* Sean

$a=6789^{m}{}'24$
$b=10079'44$
$B=87^\circ-24'-11''\ '8$

Determinaremos A por la fórmula:

$$\text{sen.}A = \frac{\text{sen.}B.a}{b}$$

log.sen.B = 9·999 5538
log.a = 3'831 8212

13·831 3750
log.b = 4'003 4364

log.sen.A = 9'827 9386 lo que da $A=42^\circ-17'-23''\ '4$

Estando dado A por un seno, podriamos tomar para el valor de este ángulo el encontrado en las tablas $42^\circ-17'-23''\ '4$, ó su suplemento; pero siendo el lado opuesto $a<b$, tambien A deberá ser menor que B, por cuya razon no podremos tomar para A el valor del ángulo obtuso.

Una vez conocido A, calcularemos C por la fórmula

$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(129^\circ-41'-35''\ '2)=50^\circ-18'-24''\ '8$

El lado *c* se determinará por la fórmula:

Ahora bien, si tomamos la ecuacion

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos.B$$

Despejando á cos.B y sustituyendo en la ecuacion: $\text{sen}^2B = 1 - \cos^2B$, se tiene:

$$\text{sen}^2B = 1 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2\,a\,c}\right)^2 = \frac{4\,a^2\,c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}{4\,a^2\,c^2}$$

elevando al cuadrado $(a^2+c^2-b^2)$ y sustituyendo, se obtiene:

$$\text{sen}^2B = \frac{4\,a^2\,c^2 - (a^4+b^4+c^4+2\,a^2\,c^2 - 2\,a^2\,b^2 - 2\,b^2\,c^2)}{4\,a^2\,c^2}$$

ejecutando la resta indicada, reduciendo y dividiendo por b^2 los dos miembros, resulta:

$$\frac{\text{sen}^2B}{b^2} = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2}{4\,a^2\,b^2\,c^2} \ldots\ldots (2)$$

y como los segundos miembros de las ecuaciones (1) y (2) son iguales, se infiere que

$$\frac{\text{sen}^2A}{a^2} = \frac{\text{sen}^2B}{b^2}$$

ó que $$\frac{\text{sen.}A}{a} = \frac{\text{sen.}B}{b},$$

que es lo que se queria demostrar.

3º—Deduciremos igualmente por medio del cálculo, de la fórmula (G) el 3er. principio cifrado en la expresion:

$$a+b : a-b :: \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B) \ldots\ldots\ldots (H)$$

se tiene:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc.\ \cos.A \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac.\ \cos.B \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab.\ \cos.C \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3)

$$b^2 + c^2 = 2\,a^2 + b^2 + c^2 - 2\,a\,c.\ \cos.B - 2\,a\,b.\ \cos.C$$

suprimiendo en los dos miembros b^2+c^2, dividiendo los términos restantes por $2\,a$ y despejando á a, se tiene:

$$a = c.\ \cos.\ B + b.\ \cos.\ C \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (3)

$$a^2 + c^2 = 2\,b^2 + a^2 + c^2 - 2\,b\,c.\ \cos.\ A - 2\,a\,b.\ \cos.\ C$$

suprimiendo en los dos miembros a^2+c^2, dividiendo los términos restantes por $2\,b$ y despejando á b, se obtiene:

$$b = c.\ \cos.\ A + a.\ \cos.\ C \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Sumando las ecuaciones (4) y (5)

$$a + b = c\,(\cos.A + \cos.B) + \cos.C\,(a+b)$$

trasladando y despejando;

$$a + b = \frac{c.\ (\cos.A + \cos.B)}{1 - \cos.C} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Restando de la ecuacion (4) la (5)

$$a - b = c\,(\cos.\ B - \cos.\ A) - \cos.\ C\,(a-b)$$

$$a - b = \frac{c\,(\cos.\ B - \cos.\ A)}{1 + \cos.\ C} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Dividiendo la ecuacion (6) por la (7)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\cos.\ A + \cos.\ B}{\cos.\ B - \cos.\ A} \times \frac{1 + \cos.\ C}{1 - \cos.\ C}$$

sustituyendo los valores de los dos factores del segundo miembro conforme á las fórmulas (72) y (44)