$$c=\frac{a\ \text{sen.}C}{\text{sen.}A}$$

log.a = 3'831 8212
log.sen.C = 9·886 1953

13'718 0165
log.sen.A = 9'827 9386

log.c = 3'890 0779 lo que da $c=\overset{m}{7763'86}$

Para comprobacion del cálculo supondremos conocidos:

$c=\overset{m}{7763'86}$; C=50°—18'—24" '8, y A=42°—17'—23" '4

y calcularemos *a* por la fórmula:

$$a=\frac{c.\text{sen.}A}{\text{sen.}C}$$

log.c = 3'890 0779
log.sen.A = 9·827 9386

13·718 0165
log.sen.C = 9'886 1953

log.a = 3'831 8212 que da $a=\overset{m}{6789'24}$, valor igual al dato primitivo de nuestro problema.

III.—*Resolver un triángulo oblicuángulo en el que se conocen dos lados y el ángulo que forman.* Sean

$a=\overset{m}{434'32}$ Para preparar el cálculo tendremos $a+b=\overset{m}{814'77}$

$b=\overset{m}{380'45}$

C=54°—37'—32" '5 a—b= 53'87

$\frac{1}{2}$ C=27°—18'—46" '25

Calcularemos primero $\frac{1}{2}$ (A+B)=90°—$\frac{1}{2}$ C=90°—(27°—18'—46" '25)

$\frac{1}{2}$ (A+B)=62°—41'—13" '75

Para calcular $\frac{1}{2}$ (A—B) nos serviremos de la fórmula (2) del tercer caso: (812)

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{(a-b)\ \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}C}{a+b}$$

log. (a—b) =1'731 3470
log. cot. $\frac{1}{2}$ C=0'286 9949

2'018 3419
log. (a+b) =2'911 0350

log. tang. $\frac{1}{2}$ (A—B)=9·107 3069 lo que da $\frac{1}{2}$(A—B)=7°—17'—44" '90

Una vez conocidos $\frac{1}{2}$ (A+B) y $\frac{1}{2}$ (A—B), determinaremos el valor de A y de B, debiendo ser A>B por ser a>b

A=62°—41'—13" '75+7°—17'—44" '90=69°—58'—58" '65
B=62°—41'—13" '75—(7°—17'—44" '90)=55°—23'—28" '85

Para determinar *c*, haremos uso de la fórmula:

$$c=\frac{a\ \text{sen.}C}{\text{sen.}A}$$

log.a = 2'637 8098
log.sen.C= 9·911 3641

12·549 1739
log.sen.A= 9·972 9388

log.c = 2'576 2351 que da $c=\overset{m}{376'908}$

Para ejercicio de los alumnos, y como comprobacion del cálculo anterior, resolveremos el mismo triángulo empleando el segundo procedimiento para el tercer caso explicado en el núm. 813. Tenemos:

a=434'32; b=380'45, y C=54°—37'—32" '5

Comenzaremos por determinar el arco auxiliar φ por la fórmula (L)

$$\text{tang.}\ \varphi=\frac{a+b}{a-b}\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}C$$

log. (a+b)= 2'911 0350
log. tang. $\frac{1}{2}$ C = 9·713 0052

12'624 0402
log. (a—b) = 1'731 3470

log. tang.φ = 0'892 6932 que da φ=82°—42'—15" '1

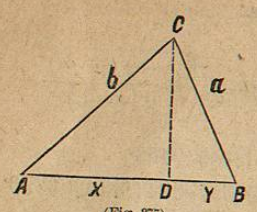
Conocido φ determinaremos *c* por la fórmula (M)

$$c=\frac{(a-b)\ \cos.\ \tfrac{1}{2}C}{\cos.\ \varphi}$$

log. (a—b) = 1'731 3470
log. cos.$\frac{1}{2}$ C = 9·948 6645

11·680 0115
log. cos. φ = 9·103 7764

log. c = 2'576 2351 que da $c=\overset{m}{376'908}$



(Fig. 377)

Tomaremos la fig. 377 para facilitar nuestra explicacion. Desde el vértice C opuesto al lado mayor, que es c, bajaremos la perpendicular C D que caerá dentro del triángulo, y el segmento mayor x quedará contíguo al lado $b>a$, esto es, será adyacente al ángulo A.

Esto supuesto, tenemos:

Suma de los segmentos $x+y=c=\overset{m}{87}'811$

Conforme al cuarto principio (808) se tiene:

$$c : b+a :: b-a : x-y=\frac{(b+a)(b-a)}{c}$$

Sustituyendo

$$x-y=\frac{129'347\times 13'807}{87'811}$$

log. $(b+a)=2'111\ 7564$
log. $(b-a)=1'140\ 0993$

$3'251\ 8557$
log. $c\ \ =1'943\ 5489$

log. $(x-y)=1'308\ 3068$ $\quad x-y=20'338$

Una vez conocida la suma y la diferencia de los segmentos:

el mayor $x=\frac{87'811}{2}+\frac{20'338}{2}=54'074$

el menor $y=\frac{87'811}{2}-\frac{20'338}{2}=33'737$

Ahora podremos resolver los triángulos rectángulos A C D y B C D para determinar los ángulos A y B por medio de las fórmulas:

$\cos.A=\frac{x}{b}$ $\qquad\qquad$ $\cos.B=\frac{y}{a}$

log. $x\ \ =1'732\ 9885$
log. $b\ \ =1'854\ 7735$

log. cos. $A=9'878\ 2150$
$A=40°-56'-1''\ '98$

log. $y\ \ =1'528\ 1065$
log. $a\ \ =1'761\ 7024$

log. cos. $B=9'766\ 4041$
$B=54°-16'-6''\ '44$

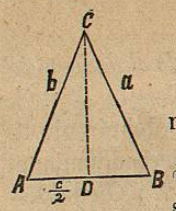
Conocidos A y B se determinará C por medio de la relacion:

$$C=180°-(A+B)$$

que da $\qquad C=84°-47'-51''\ '58$

Los valores de los ángulos tienen pequeñas diferencias con los obtenidos por el primer método, tanto porque los logaritmos no son enteramente exactos, cuanto porque una vez han sido dados por sus tangentes, y otra por sus cosenos; dando resultados mas aproximados el primer procedimiento, porque generalmente tambien lo son los logaritmos de las tangentes.

V.—*Resolver un triángulo isósceles* A B C (fig. 378), *en el que se conoce el lado* c *desigual á los otros dos, y el ángulo opuesto* C.



(Fig. 378)

Sean: $c=\overset{m}{82}'25$ y $C=48°-45'-16''\ '4$

Considerando el triángulo rectángulo C D A conocemos el cateto $\frac{c}{2}$ y el ángulo opuesto $\frac{1}{2}$ C, y tratamos de determinar la hipotenusa b y el ángulo A. A este fin nos serviremos de las fórmulas (A) y (D):

$$\frac{c}{2}=b \text{ sen. } \tfrac{1}{2}C \qquad\qquad A=90°-\tfrac{1}{2}C$$

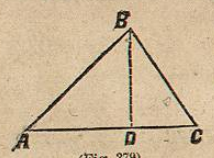
despejando $\quad b=\frac{41'125}{\text{sen.}24°-22'-38''\ '2}$ $\quad A=90°-(24°-22'-38''\ '2)$

log. $41'125\ \ =1'614\ 1059$ $\qquad\qquad$ $A=65°-37'-21''\ '8$
log. sen. $\frac{1}{2}$ C $=9'615\ 6799$

log. $b\ \ =1'998\ 4260$ $\quad$ lo que da $b=\overset{m}{99}'6382$

y como el triángulo es isósceles, B será igual á A, y $a=b$.

VI.—*Dados los tres lados de un triángulo* A B C (fig. 379), *determinar su altura, bajada desde el vértice* B.



(Fig. 379)

Si consideramos el triángulo rectángulo A D B de que forma parte la altura B D buscada, tendremos que

$$D\,B=c.\ \text{sen.}A\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

por la fórmula 34

$$\text{sen.}A=2\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}A.\cos.\tfrac{1}{2}A$$

sustituyendo por sen.$\frac{1}{2}$ A y por cos.$\frac{1}{2}$ A sus valores expresados en las fórmulas (N) y (O) se tiene:

$$\text{sen.}A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)\,p\,(p-a)}{b^2\,c^2}}$$

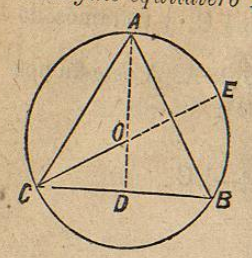
sustituyendo en la (l) y simplificando, resulta definitivamente:

$$B\,D=\frac{2}{b}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

y como $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$

se tendrá la altura B D en funcion de los tres lados.

VII.—*Determinar el radio de un círculo, conociendo el lado* a *del triángulo equilátero* A B C (fig. 380) *inscrito.*



(Fig. 380)

Por el vértice A y el centro O del círculo tiremos la recta A O D que será perpendicular al lado C B, por tener los puntos A y O equidistantes de los extremos C y B. Si trazamos la recta C O E, por pasar por el centro y ser perpendicular á la cuerda A B, dividirá el arco A E B en dos partes iguales; y como los ángulos A C E y E C B tienen respectivamente por medida la mitad de A E y de E B, resulta que la recta O C divide en dos partes iguales el ángulo A C B del triángulo. Ahora bien, como este es equilátero, cada uno de sus ángulos valdrá 60°, y en consecuencia el ángulo O C D=30°.

Considerando el triángulo rectángulo C O D, del que forma parte el radio O C buscado, segun la fórmula (B) se tiene:

$$C\,D=C\,O.\ \cos.\,O\,C\,D$$

despejando

$$C\,O=\frac{C\,D}{\cos.O\,C\,D}$$

sustituyendo y teniendo presente que el cos.30°$=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, tendremos:

$$r=\frac{\frac{1}{2}\,a}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

VIII.—*Determinar el valor del arco* x *por medio de la expresion:*

$$\text{sen.}\,x=\frac{a}{b}$$

Sea por ejemplo a=375 y b=863.

Como log. sen.x=log.a—log.b, tendremos:

log. 375=2'574 0313
—log. 863=2'936 0108

9·638 0205=log. sen.25°—45'—19" '6

Nos hemos servido del complemento aritmético, porque así se han calculado los logaritmos de las líneas trigonométricas; y despues de haber restado los logaritmos de los números hemos buscado en las tablas de las líneas trigonométricas, en la columna de los senos, á qué arco corresponde el resultado. Para que el problema sea posible, debe tenerse a<b, supuesto que el seno siempre es menor que el radio, igual á 1.

IX.—*Resolver un triángulo conociendo el ángulo* B, *el lado adyacente* a, *y la suma de los otros dos lados ó su diferencia.*

Representando por 2 p el perímetro a+b+c del triángulo, conforme á la fórmula (P) tenemos:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}\qquad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

multiplicando miembro á miembro estas ecuaciones, y dividiendo la segunda por la primera, se tiene respectivamente:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,C\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,B=\frac{p-a}{p}\qquad \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,C\ \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}\,B=\frac{p-b}{p-c}$$

de las cuales se despejaria á tang. $\frac{1}{2}$ C para hacer uso de la primera cuando se conoce la suma b+c de los otros dos lados, y de la segunda cuando se nos dé b—c. En efecto, como se conoce *a*, cuando se nos dé (b+c) fácilmente determinaremos á $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ y á p—a, que son los valores que entran junto con B en la primera expresion. Cuando ademas de *a* se nos da (b—c), tendremos:

$$a+(b-c)=a+b-c+c-c=2\,p-2\,c=2\,(p-c)$$

de la que
$$p-c=\frac{a+(b-c)}{2}$$

que son los valores que junto con B entran en la segunda expresion.

Una vez conocidos *a*, B y C, se pueden determinar los demas elementos del triángulo conforme al procedimiento explicado para el primer caso (810)

X.—*Resolver un triángulo en el que se conoce su perímetro* (a+b+c) *y los tres ángulos.*

En el núm. 814 hemos dejado demostradas las fórmulas (N):

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ B=\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}}$$

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ C=\sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}}$$

multiplicando estas ecuaciones se tiene:

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ B.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C=\frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\,c}}$$

Por otra parte, en el mismo párrafo la fórmula (O) da:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\,c}}$$

multiplicando los dos miembros de esta ecuacion por $\frac{p}{a}$ se infiere que:

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ B.\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C=\frac{p}{a}\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ A$$

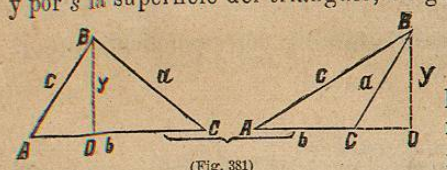
despejando á
$$a=\frac{p\ \text{sen.}\ \frac{1}{2}\ A}{\cos.\ \frac{1}{2}\ B.\ \cos.\ \frac{1}{2}\ C}$$

lo mismo que hemos determinado *a* pueden obtenerse *b* y *c*, ó emplear alguno de los procedimientos explicados para los cuatro casos de la resolucion de los triángulos oblicuángulos una vez conocido el lado *a*.

2 3 - 25

Superficie de los triángulos.

822.—Fórmula fundamental.—En geometría hemos visto (564) que la área de un triángulo tiene por valor la mitad del producto de su base por su altura; de consiguiente, si representamos por *b* la base A C de cualquiera de los dos triángulos de la fig. 381, por *y* su altura B D y por *s* la superficie del triángulo, en general tendremos:



(Fig. 381)

$$s=\tfrac{1}{2}\ by$$

pero considerando el triángulo rectángulo ABD conforme á la fórmula (A), tenemos:

$$y=c.\ \text{sen.}\,A$$

por lo que sustituyendo, resulta

$$s=\tfrac{1}{2}\ b\ c\ \text{sen.}\,A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

que consideraremos como fórmula fundamental, para deducir de ella las diferentes expresiones relativas á los casos de que vamos á ocuparnos.

823.—Casos para determinar la superficie de un triángulo.—Para el cálculo de la área de un triángulo, distinguiremos los mismos casos que para su resolucion.

1º Dados dos ángulos y un lado, determinar la superficie de un triángulo.

2º Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

3º Dados dos lados y el ángulo que forman.

4º Dados los tres lados.

824.—1er. Caso.—Supongamos conocidos los ángulos A y C y el lado b.

En la fórmula fundamental

$$s=\tfrac{1}{2}\ b\ c.\ \text{sen.}\,A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (Q)$$

no conocemos á *c*, pero podemos determinar su valor por medio de la expresion:

$$c=\frac{b\ \text{sen.}\ C}{\text{sen.}\,B}$$

Una vez conocidos a, b C y c, determinaremos A y B por las fórmulas:

$$\text{sen.}A=\frac{a\ \text{sen.}\ C}{c} \qquad \text{sen.}B=\frac{b\ \text{sen.}\ C}{c}$$

CÁLCULO DE A.

log.a = 2'637 8098
log. sen. C= 9'911 3641

12'549 1739
log.c = 2'576 2351

log.sen. A= 9·972 9388
A= 69°—58'—58" '70

CÁLCULO DE B.

log.b = 2'580 2976
log. sen. C= 9·911 3641

12'491 6617
log.c = 2'576 2351

log.sen. B= 9·915 4266
B=55°—23'—28" '89

Como comprobacion de este procedimiento, debe tenerse que

$$A+B+C=180°$$

A=69°—58'—58" '70
B=55 —23 —28 '89
C=54 —37 —32 '50

180°—00 —00 '09

la pequeña diferencia de 0" '09 procede de que las tablas de los logaritmos están calculadas solo para los arcos de 10" en 10", y en el cálculo hemos llevado la aproximacion hasta centésimas de segundo.

IV.—*Dados los tres lados de un triángulo, determinar sus tres ángulos.*

Sean: $a=\overset{m}{57'770}$, $b=\overset{m}{71'577}$ y $c=\overset{m}{87'811}$

Debiendo usar la fórmula P (814) para resolver este caso, prepararemos el cálculo de la manera siguiente:

$a=\overset{m}{57'770}$	p=108'579	p=108'579	p=108'579
b= 71·577	a= 57'770	b= 71'577	c= 87'811
c= 87'811	p—a= 50'809	p—b= 37·002	p—c= 20·768

2 p=217'158
p=108'579

Las fórmulas para determinar los ángulos, son:

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{p\ (p-a)}} \qquad \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-c)}{p\ (p-b)}}$$

log.(p—b)=1'568 2252 log.(p—a)=1'705 9406
log.(p—c)=1'317 3947 2'885 6199 log.(p—c)=1'317 3947 3'023 3353

log.p =2'035 7459 log.p =2'035 7459
log.(p—a)=1'705 9406 3'741 6865 log.(p—b)=1'568 2252 3'603 9711

Agregamos 10 para extraer raíz (1)9·143 9334 (1)9'419 3642

Tomando la mitad:

log. tang. ½ A =9·571 9667 log. tang. ½ B=9·709 6821
½ A =20°—27'—59" '97 ½ B=27°—8'—4" '24
A =40°—55'—59" '94 B=54 —16—8 '48

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)}{p\ (p-c)}}$$

log. (p—a)=1'705 9406
log. (p—b)=1'568 2252 3'274 1658

lag. p =2'035 7459
log. (p—c)=1'317 3947 3'353 1406

Agregamos 10 para extraer raíz (1) 9·921 0252

Tomando ½ log. tang. ½ C= 9·960 5126
½ C=42°—23'—55" '77
C=84 —47 —51 '54

Como comprobacion del cálculo debemos tener: A+B+C=180°
A=40°—55'—59" '94
B=54 —16 — 8 '48
C=84 —47 —51 '54

179°—59'—59" '96 La pequeña diferencia de 0" '04 procede de que los valores de los logaritmos no son exactos, sino aproximados.

Vamos á emplear el segundo procedimiento que hemos explicado (815) para el cuarto caso de la resolucion de los triángulos oblicuángulos. Conocemos los tres lados:

$$a=\overset{m}{57'770};\quad b=\overset{m}{71'577}\quad y\ c=\overset{m}{87'811}$$