vamos á demostrar que recíprocamente los vértices de este son polos de los lados del primer triángulo A B C. Estando todos los puntos del arco A′ C′ á 90° de B, este punto distará 90° de C', y estando todos los puntos del arco B' C' á 90° de A, este punto distará 90° de C′ y por tanto C′ será el polo del arco A B. De igual manera se demuestra que A' es polo de B C y que B' lo es de A C.

Ahora bien, siendo A D=90° y A E=90°, el arco D E será la medida del ángulo A (838)

Esto es, $A=D\ E$

Además tenemos $B'\ E=90°$ y $C'\ D=90°$

$$D\ E=B'\ E-B'\ D=B'\ E-(B'\ C'-D\ C')$$

sustituyendo $A=90°-(a'-90°)=180°-a'$

luego $a'=180-A.$

Así se demostraria que $b'=180°-B$ y que $c'=180°-C.$

Siendo A′ H=90° y A′ F=90°, el arco H F será medida del ángulo A′ (838)

Esto es $A'=H\ F$

$$H\ F=B\ F+H\ B=B\ F+(H\ C-B\ C)$$

sustituyendo $A'=90°+90°-a$

luego $A'=180°-a$

y de la misma manera se demostraria que

$$B'=180°-b \text{ y que } C'=180°-c.$$

Debe notarse que de los dos polos que tiene cada uno de los arcos se toma el que queda en el hemisferio que se considera.

842.—En el estudio de la trigonometría esférica seguirémos el mismo método que en la trigonometría rectilínea: trataremos primero de las fórmulas fundamentales en las que están cifradas las principales relaciones que existen entre las líneas trigonométricas de los elementos de los triángulos esféricos, nos ocuparémos en seguida de la resolucion de los triángulos rectángulos, luego de la de los oblicuángulos y por último de la determinacion de la superficie del triángulo esférico.

Debemos hacer notar que puede resolverse un triángulo esférico conociendo sus tres ángulos, sin que sea necesario, como en los triángulos rectilíneos, conocer un lado; lo cual tiene por causa que la suma de los ángulos de un triángulo plano constantemente es igual á 180°, miéntras que en los triángulos esféricos la suma de sus ángulos puede variar entre 2 y 6 ángulos rectos.



**Relacion entre los ángulos y los lados de un triángulo esférico.**

843.—De las quince combinaciones que pueden formarse con 6 cantidades combinadas de 4 en 4 segun la fórmula (356)

$$C^m_n=\frac{m(m-1)\ (m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots..\ n}$$

$$C^6_4=\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}=15$$

cuatro son las relaciones diferentes que pueden existir entre los lados y los ángulos de un triángulo esférico y son:

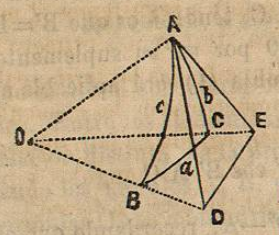
1ª Entre los tres lados y un ángulo.

2ª Entre dos lados y los ángulos opuestos.

3ª Entre dos lados, el ángulo comprendido y uno de los ángulos opuestos.

4ª Entre un lado y los tres ángulos.

844.—Relacion entre los tres lados y un ángulo.—Sea A B C (fig. 392) un triángulo trazado sobre una esfera cuyo centro es O, y cuyo radio supondremos igual á la unidad. Pudiendo ser el lado *a de cualquiera magnitud*, supondrémos menores que 90° los lados *b* y *c*. Trazando los rádios O A, O B, y O C, las tangentes A D y A E; prolongando O B, y O C y tirando la recta D E, tendrémos:



(Fig. 392.)

A D=tang. c y A E=tang. b

O D=sec. c y O E= sec. b

ángulo E A D=A y ángulo E O D=a

Los triángulos E O D y E A D dan (808 2°)

$$D\ E^2=E\ O^2+D\ O^2-2\ E\ O\times D\ O\cos E\ O\ D$$

$$D\ E^2=E\ A^2+D\ A^2-2\ E\ A\times D\ A\cos E\ A\ D$$

sustituyendo: $D\ E^2=\sec.^2 b+\sec.^2 c-2\ \sec.\ b.\ \sec.\ c\cos.\ a$

$D\ E^2=\text{tang}^2\ b+\text{tang}^2\ c-2\ \text{tang}\ b.\ \text{tang}\ c.\ \cos A$

restando la segunda ecuacion de la primera para eliminar á D E² re-

nar á C y $c$ en las ecuaciones (1) lo cual puede lograrse de diversas maneras, pero vamos á indicar el siguiente procedimiento.

De la fórmula (1)

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \cos A$$

despejando á

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}$$

sustituyendo este valor en la expresion

$$\text{sen.}^2 A = 1 - \cos.^2 A$$

se tiene

$$\text{sen.}^2 A = 1 - \left(\frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\right)^2$$

sustituyendo la diferencia de los cuadrados por el producto de la suma por la diferencia de las cantidades, resulta:

$$\text{sen.}^2 A = \left(1 + \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\right)\left(1 - \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}\right)$$

incorporando los enteros á los quebrados y multiplicando los denominadores, esta expresion se trasforma en las siguientes:

$$\text{sen.}^2 A =$$

$$\frac{(\text{sen. } b \text{ sen. } c + \cos. a - \cos. b \cos. c)\,(\text{sen. } b \text{ sen } c - \cos. a + \cos. b \cos c)}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c};$$

$$\text{sen.}^2 A = \frac{[\cos. a - \cos(b+c)]\ [\cos.(b-c) - \cos. a]}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c}$$

sustituyendo la diferencia de los cosenos por sus valores (776 f. 62)

$$\text{sen.}^2 A =$$

$$\frac{4 \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(b+c-a) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}^2 b \text{ sen.}^2 c} \ldots (c)$$

haciendo el mismo cálculo con la fórmula



$$\cos. b = \cos. a \cos. c + \text{sen. } a \text{ sen. } c \cos. B$$

se encuentra:

$$\text{sen.}^2 B =$$

$$\frac{4 \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+c-b) \text{ sen } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ sen. } \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen.}^2 a \text{ sen.}^2 c} \ldots (d)$$

dividiendo la ecuacion (c) por la (d) se encuentra:

$$\frac{\text{sen.}^2 A}{\text{sen.}^2 B} = \frac{\text{sen.}^2 a}{\text{sen.}^2 b}$$

extrayendo raíz y trasladando resulta finalmente:

$$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}$$

847.—El mismo cálculo aplicado á la fórmula

$$\cos. c = \cos. a \cos. b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \cos. C$$

conduciría al resultado

$$\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } C}$$

y por tanto se tiene finalmente:

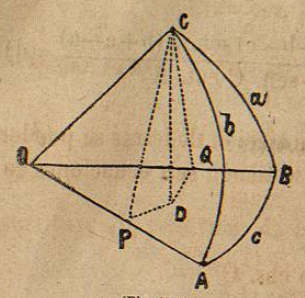
$$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \frac{\text{sen. } c}{\text{sen. } C} \ldots\ldots (2)$$

La fórmula (2) expresa que *los senos de los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

848.—La fórmula (2) puede obtenerse directamente de la figura como sigue: Bajemos del punto C (fig. 395) una perpendicular C D al plano A O B y del pié D tiremos en el mismo plano, D P perpendicular á O A y D Q perpendicular á O B. Siendo el plano C D P perpendicular á O A si tiramos C P esta recta será perpendicular á O A.

Igualmente siendo el plano C D Q perpendicular á O B la recta C Q será perpendicular á O B.

Considerando el triángulo C D P rectángulo en C D P y el triángulo C D Q rectángulo en C D Q se tiene:



(Fig. 395.)

$$C\,D = C\,P \text{ sen. } C\,P\,D$$
$$C\,D = C\,Q \text{ sen. } C\,Q\,D$$

igualando se tiene:

$$C\,P \text{ sen. } C\,P\,D = C\,Q \text{ sen. } C\,Q\,D \ldots (b)$$

considerando que C P=sen. b, que C P D =A, que C Q=sen. a y que C Q D=B, y sustituyendo en la ecuacion (b) resulta:

$$\text{sen. } b \text{ sen } A = \text{sen. } a \text{ sen. } B$$

trasladando $$\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} = \frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A}$$

que es la fórmula (2)

849.—Relacion entre dos lados, el ángulo que forman y el ángulo opuesto á uno de ellos.—Si buscamos una relacion entre *a*, *b*, C y A tendremos que eliminar *c* y B entre las ecuaciones (1) y (2). En la ecuacion

$$\text{cos. } a = \text{cos. } b \text{ cos. } c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \text{ cos. } A$$

sustituiremos $$\text{cos. } c = \text{cos. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \text{ cos. } C$$

y $$\text{sen. } c = \text{sen. } C \frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A}$$

lo que da:

$$\text{cos. } a = \text{cos. } b \text{ (cos. } a \text{ cos. } b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \text{ cos. } C) + \frac{\text{sen. } b \text{ sen. } a \text{ sen. } C \text{ cos. } A}{\text{sen. } A}$$

$$\text{cos. } a = \text{cos. } a \text{ cos}^2 b + \text{sen. } a \text{ sen. } b \text{ cos. } b \text{ cos. } C + \text{sen. } b \text{ sen. } a \text{ sen. } C \text{ cot. } A$$



$$\text{cos. } a\,(1 - \text{cos.}^2 b) = \text{sen. } a \text{ sen. } b \text{ (cos. } b \text{ cos. } C + \text{sen. } C \text{ cot. } A)$$

$$\frac{\text{cos. } a \text{ sen.}^2 b}{\text{sen. } a \text{ sen. } b} = \text{cos. } b \text{ cos. } C + \text{sen. } C \text{ cot. } A$$

y por último

$$\text{cot. } a \text{ sen. } b = \text{cos. } b \text{ cos. } C + \text{sen. } C \text{ cot. } A$$

Por cálculos idénticos, ó por simple permutacion de letras se pueden obtener otras cinco fórmulas semejantes y se tienen seis ecuaciones correspondientes á ella, que son:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{cot. } a \text{ sen. } b - \text{cot. } A \text{ sen. } C = \text{cos. } b \text{ cos. } C \\
\text{cot. } b \text{ sen. } a - \text{cot. } B \text{ sen. } C = \text{cos. } a \text{ cos. } C \\
\text{cot. } b \text{ sen. } c - \text{cot. } B \text{ sen. } A = \text{cos. } c \text{ cos. } A \\
\text{cot. } c \text{ sen. } b - \text{cot. } C \text{ sen. } A = \text{cos. } b \text{ cos. } A \\
\text{cot. } c \text{ sen. } a - \text{cot. } C \text{ sen. } B = \text{cos. } a \text{ cos. } B \\
\text{cot. } a \text{ sen. } c - \text{cot. } A \text{ sen. } B = \text{cos. } c \text{ cos. } B
\end{array}\right\} \ldots (3)$$

850.—Relacion entre un lado y los tres ángulos.—Para determinar una relacion entre *a*, A, B, C aplicando al triángulo suplementario (841 fig. 391) A' B' C' la fórmula fundamental, tendremos:

$$\text{cos } a' = \text{cos } b' \text{ cos } c' + \text{sen } b' \text{ sen } c' \text{ cos } A'$$

Como a'=180°—A; b'=180°—B; c'=180°—C y A'=180—a; sustituyendo resulta:

$$-\text{cos } A = \text{cos } B \text{ cos } C - \text{sen } B \text{ sen } C \text{ cos } a$$

cambiando signos

$$\text{cos } A = -\text{cos } B \text{ cos } C + \text{sen } B \text{ sen } C \text{ cos } a$$

aplicando el mismo procedimiento á las otras fórmulas (1) ó por simple cambio de letras resultan las tres relaciones.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{cos. } A = -\text{cos. } B \text{ cos. } C + \text{sen. } B \text{ sen. } C \text{ cos. } a \\
\text{cos. } B = -\text{cos. } A \text{ cos. } C + \text{sen. } A \text{ sen. } C \text{ cos. } b \\
\text{cos. } C = -\text{cos. } A \text{ cos. } B + \text{sen. } A \text{ sen. } B \text{ cos. } c
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

cordando que $\sec.^2 a = 1 + \tang^2 a$, y sustituyendo por $\sec. b = \frac{1}{\cos b}$

por $\sec c = \frac{1}{\cos c}$, por $\tang b = \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$ y por $\tang c = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c}$, resulta:

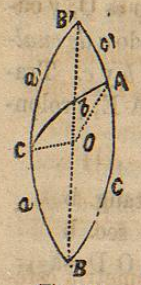
$$o = 1 + 1 - \frac{2 \cos a}{\cos b \cos c} + \frac{2 \operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \cos A}{\cos b. \cos c}$$

reduciendo, dividiendo por 2 y quitando los denominadores, resulta:

$$o = \cos b \cos c - \cos. a + \operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \cos A;$$
$$\cos. a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b. \operatorname{sen} c. \cos A \ldots (1)$$

fórmula fundamental de la trigonometría esférica en la que están cifradas las relaciones que existen entre los tres lados y un ángulo de un triángulo esférico.

845.—Generalidad de la fórmula precedente.—Para establecer la fórmula (1) hemos considerado que pueda tener $a$ cualquier valor, y hemos supuesto que tanto $b$ como $c$ eran menores que 90°, vamos á demostrar que dicha fórmula subsiste igualmente cuando uno de estos lados, $b$ ó $c$ ó cuando ambos sean mayores ó iguales á 90°.



(Fig. 393.)

1° Supongamos como ántes $a = >$ ó $<$ que 90°, y hagamos ahora $c > 90°$ y $b < 90°$. Si prolongamos (fig. 393) los arcos B A y B C de círculos máximos hasta que se encuentren en B', concibiendo los dos planos que contienen dichos arcos y que pasan por el mismo diámetro B B', se ve que B A B' = B C B' = 180° y que el ángulo B = B'. Considerando el triángulo B' A C, tendrémos que B' = B $b < 90°$ por el supuesto, y $c' < 90$ por ser su suplemento $c > 90$. En consecuencia la fórmula (1) será aplicable al triángulo B' A C y tendrémos:

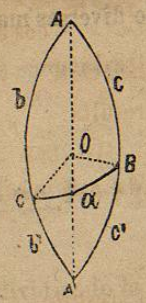
$$\cos. a' = \cos b \cos c' + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c' \cos B' A C$$

siendo $a' = 180° - a$; $c' = 180 - c$; B' A C = 180° — A; recordando que el coseno de un ángulo es igual al de su suplemento con signo contrario y sustituyendo, resulta:

$$\cos. a = \cos b. \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

que es la fórmula (1) aplicable al triángulo B A C en el que $c > 90°$





(Fig. 394.)

2° Sean ahora (fig. 394) $b > 90°$ y $c > 90°$ pudiendo tener $a$ cualquier valor. Prolonguemos A B y A C hasta que se encuentren en A'. En el triángulo A' B C, en el que tanto b' como c' son menores que un cuadrante, tendremos:

$$\cos. a = \cos. b' \cos. c' + \operatorname{sen}. b' \operatorname{sen}. c' \cos. A'$$

b' = 180° — b; c' = 180° — c; A' = A; recordando que el coseno de un ángulo es igual al de su suplemento con signo contrario, y que el seno de un ángulo es igual al de su suplemento, sustituyendo resulta:

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. c \cos. A$$

que es la fórmula (1) aplicable al triángulo B A C en el que los lados $b$ y $c$ son mayores que 90°.

Como si en la (fig. 392) suponemos que uno de los lados $b$ ó $c$ ó que ambos sean iguales á 90° desarrollando el cálculo del párrafo 844 obtendrémos la fórmula (1), resulta que esta es general y aplicable á un triángulo esférico cualquiera que sea la magnitud de sus lados.

De la fórmula que se acaba de establecer se obtienen por simple cambio de letras otras dos fórmulas semejantes; resultando así las tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \cos. a = \cos. b \cos. c + \operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. c \cos. A \\ \cos. b = \cos. a \cos. c + \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. c \cos. B \\ \cos. c = \cos. a \cos. b + \operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. b \cos. C \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

que se deben considerar como fundamentales de la trigonometría esférica. Entre los elementos de un triángulo esférico no puede existir una relacion distinta de la precedente, porque si esto fuera posible, despejando los ángulos A, B, y C de esa relacion diversa, así como de las fórmulas (1) se obtendrian para los ángulos A, B, y C dos valores diferentes, lo cual es un absurdo. De las fórmulas (1) se pueden deducir otras muchas que es indispensable conocer, y que vamos á obtener sucesivamente.

846.—Relacion entre dos lados y los ángulos opuestos.—Para obtener una relacion, por ejemplo entre $a$, $b$, A y B debemos elimi-