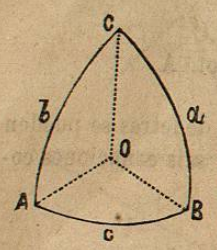
**Fórmulas relativas á los triángulos rectángulos.**




(Fig. 396.)

851.—Los triángulos esféricos pueden tener los tres ángulos rectos, dos, ó solamente uno; pero es inútil considerar los casos en que el triángulo tiene *dos* ó *tres* rectos. En efecto, si suponemos que los ángulos A y B (fig. 396) sean rectos, los dos planos A O C y A O B, serán perpendiculares entre sí, y sucederá lo mismo con los planos C O B y A O B; de consiguiente, C O es perpendicular á A O B, y serán rectos los ángulos rectilíneos C O A, C O B; esto es, a=b=90°, así como A y B. Por otra parte, por ser C O perpendicular á O A y á O B, el ángulo C estará medido por el ángulo rectilíneo A O B y se tiene C=c.

Si los tres ángulos son rectos, los radios A O, B O y C O, serán perpendiculares entre sí y se tendrá a=b=c=90°.

En uno y otro caso no hay problema que resolver.

852.—Formulas de los Triángulos rectángulos.—Supondremos que A=90°. La hipotenusa será *a*, y los lados del ángulo recto serán *b* y *c*.

Recordando que seno 90°=1, que cos 90°=0, que tang 90=∞, que cot 90°=o y sustituyendo en las fórmulas respectivas (1) (2) (3) y (4), obtendrémos las correspondientes á los triángulos rectángulos.

La fórmula (1)

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

cuando A=90° se convierte en la fórmula única:

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots\ldots\ldots (5)$$

La fórmula (2)

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

cuando A=90° da:



$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C\end{array}\right\} \ldots\ldots (6)$$

La fórmula 1ª de las (3)

$$\cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C = \cos b \cos C$$

cuando A=90° da:

$$\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{tang} a} = \cos b \cos C$$

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos C \ldots (7)$$

La 6ª fórmula de las (3)

$$\cot a \operatorname{sen} c - \cot A \operatorname{sen} B = \cos c \cos B$$

cuando A=90° da:

$$\cot a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B$$

ó bien $\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B \ldots (7)$

La 3ª de las fórmulas (3)

$$\cot b \operatorname{sen} c - \cot B \operatorname{sen} A = \cos c \cos A$$

da, si A=90° $\cot b \operatorname{sen} c = \cot B$

ó bien $\operatorname{tang} b = \operatorname{sen} c \operatorname{tang} B \ldots (8)$

De la 4ª de las fórmulas (3)

$$\cot c \operatorname{sen} b - \cot C \operatorname{sen} A = \cos b \cos A$$

Cuando A=90° se tiene:

$$\cot c \operatorname{sen} b = \cot C$$

ó bien $\operatorname{tang} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tang} C \ldots (8)$

vemos que tang. b, es el producto de dos factores, y como uno de ellos, sen. *c*, siempre es positivo, á causa de que $c<180°$, tang. b tendrá el mismo signo que tang. B. Cuando tang. *b* y tang. B tengan signo + serán *b* y B menores que 90°, y cuando tengan signo — serán *b* y B mayores que 90°, luego *un lado del ángulo recto siempre es de la misma especie que el ángulo opuesto.*

La fórmula

$$\cos. a = \cot. B \cot. C$$

discutida lo mismo que *cos. a=cos. b cos. c* conduce á la consecuencia de que *cuando los ángulos* B, C *son de la misma especie, la hipotenusa es menor que* 90°; *pero que cuando son de distinta especie, la hipotenusa es mayor que* 90°.

854.—Trasformaciones de las fórmulas de los triángulos rectángulos.—Las fórmulas anteriores pueden trasformarse en otras, que es conveniente conocer, porque los resultados son más aproximados sirviéndose de los logaritmos.

De la fórmula

$$\cos. a = \cos. b \cos. c$$

despejando á

$$\cos. c = \frac{\cos. a}{\cos. b}$$

y sustituyendo este valor en la expresion

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1-\cos. c}{1+\cos. c}}$$

resulta:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1-\frac{\cos. a}{\cos. b}}{1+\frac{\cos. a}{\cos. b}}} = \sqrt{\frac{\cos. b-\cos. a}{\cos. b+\cos. a}}$$

$$= \sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2} (a-b) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (a+b)} \quad [777 \text{ f } (52)]$$

por trasformaciones idénticas se obtiene tang. $\frac{1}{2}$ b, de manera que de la fórmula *cos. a=cos. b cos. c* resultan las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang. } \tfrac{1}{2} c = +\sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2} (a-b) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (a+b)} \\ \text{tang. } \tfrac{1}{2} b = +\sqrt{\text{tang. } \tfrac{1}{2} (a-c) \text{ tang. } \tfrac{1}{2} (a+c)} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$



De la fórmula

$$\text{sen. } b = \text{sen. } a \text{ sen. } B$$

se obtiene

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} \ldots\ldots\ldots (a)$$

por otra parte

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} (90° + a) = \sqrt{\frac{1-\cos. [90° + a]}{1+\cos. [90° + a]}} = \sqrt{\frac{1+\text{sen. } a}{1-\text{sen. } a}}$$

sustituyendo la expresion (a) en esta fórmula, se tiene:

$$\text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} a] = \pm \sqrt{\frac{1+\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}}{1-\frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B}}} = \sqrt{\frac{\text{sen. } B+\text{sen. } b}{\text{sen. } B-\text{sen. } b}}$$

ó bien

$$\text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} a] = \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} [B+b]}{\text{tang. } \frac{1}{2} [B-b]}} \quad (777 \text{f}[67])$$

De manera que de las fórmulas (6) se obtienen:

$$\text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} a] = \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} [B+b]}{\text{tang. } \frac{1}{2} [B-b]}} = \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} [C+c]}{\text{tang. } \frac{1}{2} [C-c]}} \ldots\ldots (12)$$

Como las fórmulas (6) no se alteran cuando en ellas se reemplaza el lado *a* por el ángulo B, y B por *a*, así como cuando se reemplaza *a* por C y C por *a*, pues se tiene:

$$\text{sen. } b = \text{sen. } a \text{ sen. } B = \text{sen. } B \text{ sen. } a$$
$$\text{sen. } c = \text{sen. } a \text{ sen. } C = \text{sen. } C \text{ sen. } a$$

haciendo esta permutacion en las fórmulas (12) que se han deducido de las (6) se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} B] = \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (a+b)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (a-b)}} \\ \text{tang. } [45° + \tfrac{1}{2} C] = \pm \sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (a+c)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (a-c)}} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (13)$$

Por cálculos análogos, cuyo desarrollo recomendamos al lector que ejecute, pueden obtenerse las fórmulas siguientes:

De las fórmulas $\text{tang.}\,b = \text{tang.}\,a \cos.\,C$, $\text{tang.}\,c = \text{tang.}\,a \cos.\,B$

se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,C &= +\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(a-b)}{\text{sen.}\,(a+b)}} \\ \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,B &= +\sqrt{\frac{\text{sen.}\,(a-c)}{\text{sen.}\,(a+c)}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (14)$$

De las fórmulas

$\text{tang.}\,b = \text{sen.}\,c\ \text{tang.}\,B$, $\text{tang.}\,c = \text{sen.}\,b\ \text{tang.}\,C$

se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \text{tang.}\,[45^\circ + \tfrac{1}{2}\,c] &= \pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\,[B+b]}{\text{sen.}\,[B-b]}} \\ \text{tang.}\,[45^\circ + \tfrac{1}{2}\,b] &= \pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\,[C+c]}{\text{sen.}\,[C-c]}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (15)$$

Las fórmulas (9)

$$\cos.\,B = \cos.\,b\ \text{sen.}\,C$$
$$\cos.\,C = \cos.\,c\ \text{sen.}\,B$$

dan

$$\cos.\,b = \frac{\cos.\,B}{\cos.\,[90^\circ - C]} \quad \text{y} \quad \cos.\,c = \frac{\cos.\,C}{\cos.\,[90^\circ - B]}$$

sustituyendo en la fórmula

$$\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\,b = \frac{1-\cos.\,b}{1+\cos.\,b}$$

$$\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\,b = \frac{\cos.\,(90^\circ - C) - \cos.\,B}{\cos.\,(90^\circ - C) + \cos.\,B}$$

$$= \frac{2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + B - C)\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(B + C - 90^\circ)}{2\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + B - C)\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(B + C - 90^\circ)}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,b = +\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ + \frac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)} \ldots (15\tfrac{1}{2})$$

un cálculo semejante con el valor de cos. *c* conduce al resultado



$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,c = +\sqrt{\text{tang.}\left(45^\circ - \frac{B-C}{2}\right)\ \text{tang.}\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)} \ldots\ldots (15\tfrac{1}{2})$$

Ahora, sustituyendo el valor de $\text{sen.}\,C = \frac{\cos.\,B}{\cos.\,b}$ de la ecuacion (9) en la fórmula:

$$\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,C) = \sqrt{\frac{1+\text{sen.}\,C}{1-\text{sen.}\,C}}$$

se tiene:

$$\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,C) = \sqrt{\frac{\cos.\,b + \cos.\,B}{\cos.\,b - \cos.\,B}} = \sqrt{\frac{2\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(B+b)\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(B-b)}{2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(B+b)\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(B-b)}}$$

$$\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,C) = \pm\sqrt{\cot.\,\tfrac{1}{2}\,(B+b)\cot.\,\tfrac{1}{2}\,(B-b)} \ldots (16)$$

un cálculo semejante con el valor $\text{sen.}\,B = \frac{\cos.\,C}{\cos.\,c}$ conduce á la fórmula:

$$\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\,B) = +\sqrt{\cot.\,\tfrac{1}{2}\,(C+c)\cot.\,\tfrac{1}{2}\,C-c]} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

La fórmula $\cos.\,a = \cot.\,B\cot.\,C$ se trasforma en:

$$\cos.\,a = \frac{\cos.\,B\cos.\,C}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}$$

sustituyendo este valor en la expresion:

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1-\cos.\,a}{1+\cos.\,a}} \quad \text{da:}$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C - \cos.\,B\cos.\,C}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C + \cos.\,B\cos.\,C}} = \sqrt{\frac{-\cos.\,(B+C)}{\cos.\,(B-C)}}$$

y por último

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a = +\sqrt{\frac{\cos.\,(180^\circ - B - C)}{\cos.\,(B-C)}} \ldots\ldots\ldots (16\tfrac{1}{2})$$

855.—Fórmulas de los triángulos rectiláteros.—Se dice que un triángulo esférico es *rectilátero* cuando uno de sus lados es de 90°.

Si nos imaginamos un triángulo de esta especie A B C en el que el

lado a=90°, el triángulo suplementario A' B' C' será rectángulo en A. Aplicando á este triángulo las fórmulas (5) á (10),

$$\cos. a' = \cos. b' \cos. c'$$
$$\text{sen. } b' = \text{sen. } a' \text{ sen. } B'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\cos. a' = \cot. B' \cot. C'$$

y sustituyendo en estas fórmulas los valores:

$$a' = 180 - A;\ b' = 180 - B;\ c' = 180° - C;$$
$$A' = 180° - a;\ B' = 180° - b,\ \text{y } C' = 180° - c$$

se obtendrán las siguientes fórmulas, correspondientes á un triángulo *rectilátero* que son:

$$\cos. A = -\cos. B \cos. C \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. } B = \text{sen. } A \text{ sen. } b \\ \text{sen. } C = \text{sen. } A \text{ sen. } c\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (18)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } B = -\text{tang. } A \cos. c \\ \text{tang. } C = -\text{tang. } A \cos. b\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (19)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } B = \text{sen. } C \text{ tang. } b \\ \text{tang. } C = \text{sen. } B \text{ tang. } c\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (20)$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos. b = \cos. B \text{ sen. } c \\ \cos. c = \cos. C \text{ sen. } b\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (21)$$

$$\cos. A = -\cot. b \cot. c \ldots\ldots\ldots (22)$$

A cuyas fórmulas se les puede hacer sufrir trasformaciones análogas á las que en el párrafo 854 hicimos experimentar á las de los triángulos rectángulos. Las fórmulas 17 á 22 pueden deducirse igualmente de las (1), (2), (3) y (4) haciendo en ellas $a = 90°$



**Uso de los ángulos auxiliares en la Trigonometría esférica.**

856.—Las fórmulas generales (1) á (4) no son adaptables al uso de los logaritmos; pero pueden trasformarse, sirviéndose de un arco auxiliar, en otras que sean adecuadas para el empleo de estas magnitudes.

En efecto, esas fórmulas son de la forma

$$P = M \cos. \alpha + N \text{ sen. } \alpha \ldots\ldots\ldots (A)$$

siendo $\alpha$ uno de los seis elementos del triángulo, y M, N, P representando funciones monomias de las líneas trigonométricas de tres elementos diversos de $\alpha$. Si se designa por $\varphi$ un ángulo auxiliar, tal que

$$\text{tang. } \varphi = \frac{N}{M} \ldots\ldots\ldots (B)$$

escogiéndose la tangente porque esta línea puede tener toda clase de valores, y se sustituye N por su valor M tang. $\varphi$ en la fórmula (A), y por tang. $\varphi$, $\frac{\text{sen. } \varphi}{\cos. \varphi}$, se convertirá en

$$P \cos. \varphi = M \cos. (\alpha - \varphi) \ldots\ldots\ldots (C)$$

De lo expuesto resulta que introduciendo el arco auxiliar $\varphi$, la fórmula (A) puede ser reemplazada por el sistema de las fórmulas (B) y (C) calculables ambas por logaritmos.

Por ejemplo, la fórmula fundamental

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \cos. A \ldots\ldots\ldots (1)$$

puede hacerse calculable por logaritmos por medio de un arco auxiliar.

Sacando cos. $b$ como factor comun

$$\cos. a = \cos. b\ (\cos. c + \text{sen. } c \text{ tang. } b \cos. A)$$

introduciendo el arco auxiliar $\varphi$, haciendo

$$\cot. \varphi = \text{tang. } b \cos. A \ldots\ldots\ldots (D)$$

sustituyendo resulta:

$$\cos. a = \cos. b \left(\cos. c + \text{sen. } c \frac{\cos. \varphi}{\text{sen. } \varphi}\right) = \cos. b \left(\frac{\text{sen. } \varphi \cos. c + \text{sen. } c \cos. \varphi}{\text{sen. } \varphi}\right)$$

y por último

$$\cos. a = \frac{\cos. b}{\text{sen. } \varphi} \text{sen. } (\varphi + c) \ldots\ldots\ldots (E)$$

De la 2ª de las fórmulas (4)

$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$

cuando $A = 90°$ se tiene:

$$\cos B = \cos b \operatorname{sen} C \ldots (9)$$

De la 3ª de las fórmulas (4)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$$

cuando $A = 90°$ se obtiene:

$$\cos C = \cos c \operatorname{sen} B \ldots (9)$$

De la 1ª de las fórmulas (4)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

Cuando $A = 90°$ se tiene:

$$\cos B \cos C = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

ó bien la fórmula única:

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots (10)$$

En las seis fórmulas diferentes que acabamos de obtener, están cifrados los siguientes principios:

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots (5)$$

expresa que *el coseno de la hipotenusa es igual al producto de los cosenos de los catetos.*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} C \end{array}\right\} \ldots (6)$$

expresan que *el seno de un lado es igual al seno de la hipotenusa multiplicado por el seno del ángulo opuesto al lado que se considera.*

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang.} b = \operatorname{tang.} a \cos. C \\ \operatorname{tang.} c = \operatorname{tang.} a \cos. B \end{array}\right\} \ldots (7)$$

expresan que *la tangente de un lado es igual al producto de la tangente de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente.*



$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang.} b = \operatorname{sen.} c \operatorname{tang.} B \\ \operatorname{tang.} c = \operatorname{sen.} b \operatorname{tang.} C \end{array}\right\} \ldots (8)$$

expresan que *la tangente de un lado es igual al producto del seno del otro lado por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

$$\left.\begin{array}{l} \cos. B = \cos. b \operatorname{sen.} C \\ \cos. C = \cos. c \operatorname{sen.} B \end{array}\right\} \ldots (9)$$

expresan que *el coseno de un ángulo es igual al producto del coseno del lado opuesto por el seno del otro ángulo.*

$$\cos. a = \cot. B \cot. C \ldots (10)$$

expresa que *el coseno de la hipotenusa es igual al producto de las cotangentes de los ángulos oblícuos.*

853.—Discusion de algunas fórmulas de los triángulos rectángulos.—En la fórmula

$$\cos. a = \cos. b \cos. c$$

pueden hacerse las siguientes hipótesis:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1ª | $b<90°$ cos. $b$ tiene signo + | cos. $a$ tendrá signo + | y $a<90°$ |
| | $c<90°$ cos. $c$ ,, ,, + | | |
| 2ª | $b>90°$ cos. $b$ ,, ,, — | cos. $a$ ,, ,, + | y $a<90°$ |
| | $c>90°$ cos. $c$ ,, ,, — | | |
| 3ª | $b>90°$ cos. $b$ ,, ,, — | cos. $a$ ,, ,, — | y $a>90°$ |
| | $c<90°$ cos. $c$ ,, ,, + | | |
| 4ª | $b<90°$ cos. $b$ ,, ,, + | cos. $a$ ,, ,, — | y $a>90°$ |
| | $c>90°$ cos. $c$ ,, ,, — | | |

De lo cual se deduce la siguiente regla. *Cuando los lados del ángulo recto son de la misma especie, la hipotenusa es menor que 90°; y cuando esos lados son de distinta especie, la hipotenusa es mayor que 90°.*

En la fórmula

$$\operatorname{tang.} b = \operatorname{sen.} c \operatorname{tang.} B$$