Fórmulas generales calculables por logaritmos.

857.—Fórmulas para determinar los ángulos en funcion de los lados.—Vamos á trasformar las fórmulas (1) para hacerlas adaptables al uso de los logaritmos, y por tanto propias para la resolucion de los problemas de la trigonometría esférica.

De la primera de las fórmulas (1)

$$\cos. a = \cos. b \cos. c + \text{sen. } b \text{ sen. } c \cos. A$$

se obtiene:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c} \ldots\ldots\ldots [a]$$

sustituyendo este valor en la fórmula [770]

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \cos. A}{2}$$

se tiene:

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 - \dfrac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}}{2} = \frac{\text{sen. } b \text{ sen. } c + \cos. b \cos. c - \cos. a}{2 \text{ sen. } b \text{ sen. } c}$$

$$\text{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos. [b-c] - \cos. a}{2 \text{ sen. } b \text{ sen. } c} = \frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2} [b-c+a] \text{ sen. } \tfrac{1}{2} [a+c-b]}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}$$

haciendo, como en los triángulos rectilíneos,

$$a + b + c = 2 p$$

restando de los dos miembros de esta ecuacion sucesivamente 2 c y 2 b, se obtiene:

$$a + b - c = 2 p - 2 c, \qquad a - b + c = 2 p - 2 b$$

sustituyendo estos valores en el de $\text{sen}^2 \frac{1}{2} A$ y extrayendo raíz, resulta

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } [p-b] \text{ sen. } [p-c]}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}} \ldots\ldots\ldots (23)$$

Sustituyendo ahora el valor

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}$$

en la fórmula [770]

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{1 + \cos. A}{2}$$

y por el mismo procedimiento de cálculo se obtiene:

$$\cos. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } [p-a]}{\text{sen. } b \text{ sen. } c}} \ldots\ldots\ldots (24)$$

Dividiendo [23] por [24] resulta:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } [p-b] \text{ sen. } [p-c]}{\text{sen. } p \text{ sen. } [p-a]}} \ldots\ldots\ldots (25)$$

Dividiendo la (24) por la (23) resulta:

$$\cot. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } p \text{ sen. } [p-a]}{\text{sen. } [p-b] \text{ sen. } [p-c]}} \ldots\ldots\ldots (26)$$

N. B.—En todas estas fórmulas, el radical debe tomarse con el signo más, en razon de que $A < 180°$ y de que las líneas trigonométricas de los ángulos agudos, $\frac{1}{2} A$, son positivas.

858.—Fórmulas para determinar los lados en funciom de los ángulos.—De la fórmula (4)

$$\cos. A = -\cos. B \cos. C + \text{sen. } B \text{ sen. } C \cos. a$$

se obtiene:

$$\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}$$

sustituyendo este valor en las expresiones:

$$\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cos. a}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos.^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 + \cos. a}{2}$$

y por medio de operaciones idénticas á las que hemos ejecutado en el párrafo anterior, se obtiene, haciendo:

$$P = \tfrac{1}{2} [A + B + C]$$

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

y como $\quad A + B + C = 2\,P$

$$\varepsilon = 2\,P - 180^\circ$$

de donde $\quad \frac{1}{2}\,\varepsilon = P - 90^\circ$

$$P = \frac{\varepsilon}{2} + 90^\circ$$

sustituyendo por P su valor en las ecuaciones (27), (28), (29) y (30), recordando que $\cos.\left(90^\circ + \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\,\text{sen.}\frac{\varepsilon}{2}$,

y que $\quad \cos.\left(90^\circ + \frac{\varepsilon}{2} - A\right) = -\,\text{sen.}\left(\frac{\varepsilon}{2} - A\right) = \text{sen.}\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)$

se obtiene:

$$\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\ \text{sen.}\,(A - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}} \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\cos.\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(B - \frac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{sen.}\,(C - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen.}\,B\ \text{sen.}\,C}} \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\ \text{sen.}\,(A - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen.}\,(B - \frac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{sen.}\,(C - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

$$\cot.\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(B - \frac{1}{2}\,\varepsilon)\ \text{sen.}\,(C - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\ \text{sen.}\,(A - \frac{1}{2}\,\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

860.—Fórmulas de Delambre.—Si en la fórmula

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \text{sen.}\,\frac{A}{2}\,\cos.\frac{B}{2} + \text{sen.}\,\frac{B}{2}\,\cos.\frac{A}{2}$$

sustituimos por sen. $\frac{1}{2}$ A, cos. $\frac{1}{2}$ A, sus valores de las fórmulas (23) y (24), y sus correspondientes por sen. $\frac{1}{2}$ B y por cos. $\frac{1}{2}$ B, encontraremos:

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-b)\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}} \cdot \sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-b)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,c}}$$

$$+ \sqrt{\frac{\text{sen.}\,(p-a)\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,c}} \cdot \sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c}}$$

ejecutando la multiplicacion:

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\text{sen.}\,(p-b)}{\text{sen.}\,c}\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}}$$

$$+ \frac{\text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,c}\sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen.}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}}$$

como segun la fórmula correspondiente á la (24)

$$\cos.\,\tfrac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,p\ \text{sen}\,(p-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b}}$$

sustituyendo se tiene:

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\text{sen.}\,(p-b)}{\text{sen.}\,c}\cos.\,\tfrac{1}{2}\,C + \frac{\text{sen.}\,(p-a)}{\text{sen.}\,c}\cos.\,\tfrac{1}{2}\,C$$

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\cos.\,\frac{1}{2}\,C}{\text{sen.}\,c}\Big(\text{sen.}\,(p-b) + \text{sen.}\,(p-a)\Big) \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

De acuerdo con la fórmula: [776 f (59)]

$$\text{sen.}\,a + \text{sen.}\,b = 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b)\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

$$\text{sen.}\,(p-b) + \text{sen.}\,(p-a) = 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(2\,p-b-a)\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(p-b-p+a)$$

$$= 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b+c-b-a)\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

$$= 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,c\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

sustituyendo en la ecuacion (a) este valor y el de

$$\text{sen.}\,c = 2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,c\cos.\,\tfrac{1}{2}\,c \qquad [770\ f\ (34)]$$

se tiene:

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\cos.\,\frac{1}{2}\,C}{2\ \text{sen.}\,\frac{1}{2}\,c\cos.\,\frac{1}{2}\,c}\,2\ \text{sen.}\,\tfrac{1}{2}\,c\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

$$\text{sen.}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \frac{\cos.\,\frac{1}{2}\,C}{\cos.\,\frac{1}{2}\,c}\cos.\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)$$

de donde por último:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B)}{\cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots (35)$$

Operaciones análogas hechas con las expresiones de sen. $\frac{1}{2}$ (A—B), cos. $\frac{1}{2}$ (A+B) y cos. $\frac{1}{2}$ (A—B) conducen á las siguientes fórmulas:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)}{\cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots (36)$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. } \frac{1}{2} C} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}{\cos. \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots (37)$$

$$\frac{\cos. \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2} C} = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. } \frac{1}{2} c} \ldots\ldots\ldots [38]$$

Estas fórmulas notables, que encierran los seis elementos del triángulo esférico, fueron descubiertas en 1807 por Delambre.

861.—Analogías de Neper.—Si dividimos ordenadamente las fórmulas [35] y [37] obtendremos:

$$\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B) \text{ sen. } \frac{1}{2} C}{\cos. \frac{1}{2}(A+B) \cos. \frac{1}{2} C} = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)}$$

de donde

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(A+B) = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots [39]$$

dividiendo la [36] por la [38] y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ [A—B], resulta:

$$\text{tang. } \frac{1}{2}[A-B] = \cot. \frac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}[a-b]}{\text{sen. } \frac{1}{2}[a+b]} \ldots\ldots\ldots [40]$$

Dividiendo la [38] por la [37] y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ [a+b], resulta:

$$\text{tang. } \frac{1}{2}[a+b] = \text{tang. } \frac{1}{2} c \frac{\cos. \frac{1}{2}[A-B]}{\cos. \frac{1}{2}[A+B]} \ldots\ldots\ldots [41]$$

Dividiendo la [36] por la [35] y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ [a—b], resulta:

$$\text{tang. } \frac{1}{2}[a-b] = \text{tang. } \frac{1}{2} c \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}[A-B]}{\text{sen. } \frac{1}{2}[A+B]} \ldots\ldots\ldots [42]$$

Las ecuaciones (39), (40), (41) y (42), son conocidas bajo el nombre de fórmulas ó analogías de Neper, cada una de las cuales contiene cinco de los elementos de un triángulo esférico.

Expresiones del exceso esférico.

862.—Vamos á dar á conocer algunas fórmulas en las que figura el exceso esférico, elemento importante en las aplicaciones de la trigonometría esférica para medir la superficie de un triángulo, y cuyas fórmulas servirán para calcularlo en los diferentes casos que haya necesidad de considerar.

863.—Exceso esférico en funcion de dos lados y del ángulo que forman.—Hemos encontrado (859, fórm. 34) que

$$\cot. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen. } (B-\frac{1}{2}\varepsilon) \text{ sen. } (C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } (A-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

y por tanto

$$\cot. \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\text{sen. } [A-\frac{1}{2}\varepsilon] \text{ sen. } [C-\frac{1}{2}\varepsilon]}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } [B-\frac{1}{2}\varepsilon]}}$$

Multiplicándolas y simplificando. queda:

$$\cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b = \frac{\text{sen. } [C-\frac{1}{2}\varepsilon]}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon}$$

poniendo por seno [C—$\frac{1}{2}\varepsilon$] su desarrollo

$$\cot. \frac{1}{2} a \cot. \frac{1}{2} b = \frac{\text{sen. } C \cos. \frac{1}{2}\varepsilon - \text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \cos. C}{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon} = \text{sen. } C \cot. \frac{1}{2}\varepsilon - \cos. C$$

de donde

$$\cot.\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \frac{\cot.\ \tfrac{1}{2}\ a\ \cot.\ \tfrac{1}{2}\ b + \cos.\ C}{\text{sen.}\ C} \ldots\ldots\ldots (43)$$

865.—Fórmula del exceso esférico apropiada al uso de los logaritmos.—Puede obtenerse otra fórmula para el exceso esférico en funcion de tres lados *a*, *b*, *c* y un ángulo C, que sea calculable por logaritmos.

Sabemos que $\tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \tfrac{1}{2}\ [A+B+C] - 90°$

luego $\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = -\cos.\ \tfrac{1}{2}\ [A+B+C]$

ó bien

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ [A-B]\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ [A+B]\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C$$

sustituyendo por sen. $\tfrac{1}{2}$ [A+B] y por cos. $\tfrac{1}{2}$ [A+B] los valores que dan las fórmulas [35] y [37] de Delambre, resulta:

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ C\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ [a-b]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C - \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ [a+b]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C$$

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C\ [\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a+b)]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}$$

y por último

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon = \frac{\text{sen.}\ C}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ a\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ b \ldots\ldots\ldots [44]$$

866.—Exceso esférico en funcion de los tres lados.—La fórmula de Delambre (35)

$$\frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ [A+B]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ C} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ [a-b]}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}$$

puede ponerse bajo la forma:

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) : \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (A+B) :: \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c : \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C$$

de la cual resulta: (225)

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) + \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c} = \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (A+B) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (A+B) + \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C} \ldots (a)$$

Como $A+B+C-180° = \varepsilon$

$\tfrac{1}{2}\ (A+B) = 90° + \tfrac{1}{2}\ (\varepsilon - C)$

y $\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ (A+B) = \cos.\ \tfrac{1}{2}\ (\varepsilon - C)$

sustituyendo este valor en (a) se tendrá:

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a-b) + \cos.\ \tfrac{1}{2}\ c} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (\varepsilon - C) - \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (\varepsilon - C) + \cos.\ \tfrac{1}{2}\ C}$$

poniendo por la diferencia y por la suma de los cosenos sus valores (776) resulta:

$$\frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{4}\ (a+c-b)\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{4}\ (c+b-a)}{\cos.\ \tfrac{1}{4}\ (a+c-b)\ \cos.\ \tfrac{1}{4}\ (c+b-a)} = \frac{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{sen.}\ \tfrac{1}{4}\ \varepsilon}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos.\ \tfrac{1}{4}\ \varepsilon}$$

ó $\text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\ (a+c-b)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\ (c+b-a) = \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\ \varepsilon \ldots\ldots (b)$

De la fórmula de Delambre (37)

$$\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (A+B)}{\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\ C} = \frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ (a+b)}{\cos.\ \tfrac{1}{2}\ c}$$

por operaciones análogas, se deduce la siguiente:

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\ (a+b+c)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\ (a+b-c) = \cot.\ \tfrac{1}{2}\ (C - \tfrac{1}{2}\ \varepsilon)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\ \varepsilon \ldots\ldots\ldots (c)$$

Multiplicando (b) por (c) y poniendo por $a+b+c=2p$, resulta:

$$\text{tg.}^2\ \tfrac{1}{4}\ \varepsilon = \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ p.\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-a)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-b)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-c)$$

y por último:

$$\text{tg.}\ \tfrac{1}{4}\ \varepsilon = \sqrt{\text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ p.\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-a)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-b)\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}\ (p-c)} \ldots\ldots\ldots (45)$$

fórmula notable que es debida á Simon l'Huillier.

Si el triángulo es equilátero, como $p=\frac{3a}{2}$ y

$p-a=p-b=p-c=\frac{2}{a}$ la fórmula se convierte en:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{4}\,\varepsilon=\sqrt{\text{tg.}\frac{3a}{4}\text{tg.}^{3}\tfrac{1}{4}a}$$

867.—Seno del exceso esférico en funcion de los tres lados. —Hemos determinado la fórmula

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,\varepsilon=\frac{\text{sen. C}}{\text{cos. } \frac{1}{2}\text{c}}\text{ sen. } \tfrac{1}{2}\text{ a sen. } \tfrac{1}{2}\text{ b}\ldots\ldots\ldots(44)$$

Sustituirémos en la fórmula

$$\text{sen. C}=2\text{ sen. } \tfrac{1}{2}\text{ C cos. } \tfrac{1}{2}\text{ C}$$

los valores de sen. $\frac{1}{2}$ C y de cos. $\frac{1}{2}$ C de las fórmulas (23) y (24) y obtendrémos:

$$\text{sen. C}=\frac{2}{\text{sen. a sen. b}}\sqrt{\text{sen. p sen. (p—a) sen. (p—b) sen. (p—c)}}$$

sustituyendo los valores de sen. a=2 sen. $\frac{1}{2}$ a cos. $\frac{1}{2}$ a, sen b=2 sen. $\frac{1}{2}$ b cos. $\frac{1}{2}$ b, resulta:

$$\text{sen. C}=\frac{\sqrt{\text{sen. p sen. (p—a) sen. (p—b) sen. (p—c)}}}{2\text{ sen. } \frac{1}{2}\text{ a cos. } \frac{1}{2}\text{ a sen. } \frac{1}{2}\text{ b cos. } \frac{1}{2}\text{ b}}$$

sustituyendo en la (44) y suprimiendo el factor comun sen. $\frac{1}{2}$ a sen. $\frac{1}{2}$ b finalmente resulta:

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\varepsilon=\frac{\sqrt{\text{sen. p sen. (p—a) sen. (p—b) sen. (p—c)}}}{2\text{ cos. } \frac{1}{2}\text{ a cos. } \frac{1}{2}\text{ b cos. } \frac{1}{2}\text{ c}}\ldots(46)$$

Resolucion de los triángulos rectángulos.

868.—Casos y fórmulas para resolver los triángulos rectángulos.—Ya hemos indicado que en los triángulos esféricos rectángulos no hay necesidad de ocuparse de su resolucion cuando están formados por dos ó por tres ángulos rectos (851). Cuando tienen un solo ángulo recto, siendo siempre conocido el elemento A=90°, para poder resolverlos, basta tener una relacion adecuada entre *tres* de las *cinco* cantidades a, b, c, B, C, de las cuales *dos* considerarémos como datos y una como incógnita. Ahora bien: el número de combinaciones que pueden hacerse con 5 cantidades tomadas de 2 en 2, son 10, conforme á la fórmula: (356).

$$C^{m}_{n}=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.\,2.\,3\ldots n}$$

Sustituyendo $C^{5}_{2}=\frac{5.\,4}{2}=10$ combinaciones.

De estas 10 combinaciones resultan solamente seis casos diferentes:

1er. caso: se conocen *b c*
2º caso: ,, *a b* ó *a c*
3er. caso: ,, *b* C ó *c* B
4º caso: ,, *b* B ó *c* C
5º caso: ,, *a* B ó *a* C
6º caso: ,, B C

Para la resolucion de estos casos no hay más que aplicar la fórmula que contenga los elementos conocidos y aquel que se busca de las que dejamos demostradas (852 y 854) y son las siguientes:

Entre la hipotenusa y dos lados

$$\text{cos. a}=\text{cos. b cos. c}\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ c}=+\sqrt{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (a—b) tang. } \frac{1}{2}\text{ (a+b)}}\\ \text{tang. } \frac{1}{2}\text{ b}=+\sqrt{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (a—c) tang. } \frac{1}{2}\text{ (a+c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(11)$$

Entre la hipotenusa, un lado y el ángulo opuesto

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. b}=\text{sen. a sen. B}\\ \text{sen. c}=\text{sen. a sen. C}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$\text{tang. } (45^{\circ}+\tfrac{1}{2}\text{ a})=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (B+b)}}{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (B—b)}}}=\pm\sqrt{\frac{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (C+c)}}{\text{tang. } \frac{1}{2}\text{ (C—c)}}}\ldots(12)$$

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\cos. P \cos. [P-A]}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}} \quad \ldots\ldots\ldots(27)$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\cos. [P-B] \cos. [P-C]}{\text{sen. } B \text{ sen. } C}} \quad \ldots\ldots\ldots(28)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{-\cos. P \cos. (P-A)}{\cos. (P-B) \cos. (P-C)}} \quad \ldots\ldots\ldots(29)$$

$$\cot. \tfrac{1}{2}\,a=\sqrt{\frac{\cos. (P-B) \cos. (P-C)}{-\cos. P \cos. (P-A)}} \quad \ldots\ldots\ldots(30)$$

Los valores de las expresiones anteriores, en las que cos.P está afectado del signo — dentro del radical, no son imaginarios, como á primera vista pudiera creerse, pues sabiendo que

$$A+B+C>2\times 90^\circ$$
$$A+B+C<6\times 90^\circ$$

resulta:

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C)=P>90^\circ$$
$$P<3.90^\circ$$

y como el coseno en los arcos de 90 á 270° es negativo, resulta que — cos.P es una cantidad *positiva*, y por tanto serán reales los valores dados por las fórmulas precedentes.

Por medio del triángulo suplementario pueden deducirse estas cuatro fórmulas de las (23), (24), (25) y (26). Por vía de ejercicio de la fórmula

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{\text{sen. } (p-b) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}} \quad \ldots\ldots\ldots(25)$$

vamos á deducir las (29) y (30).

En el triángulo suplementario, tenemos:

$A=180^\circ-a'$	$a=180^\circ-A'$	$p-a=90^\circ-(P'-A')$
$B=180^\circ-b'$	$b=180^\circ-B'$	$p-b=90^\circ-(P'-B')$
$C=180^\circ-c'$	$c=180^\circ-C'$	$p-c=90^\circ-(P'-C')$
$P=270^\circ-p'$	$p=270^\circ-P'$	

sustituyendo estos valores en la fórmula (25), se tiene:

$$\text{tang. } (90^\circ-\tfrac{1}{2}\,a')=\sqrt{\frac{\text{sen. } [90^\circ-(P'-B')] \text{ sen. } [90^\circ-(P'-C')]}{\text{sen. } (270^\circ-P') \text{ sen. } [90^\circ-(P'-A')]}}$$

$$\cot. \tfrac{1}{2}\,a'=\sqrt{\frac{\cos. (P'-B') \cos. (P'-C')}{-\cos. P' \cos. (P'-A')}} \quad \ldots\ldots\ldots(30)$$

ó

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,a'=\sqrt{\frac{-\cos. P' \cos. (P'-A')}{\cos. (P'-B') \cos. (P'-C')}} \quad \ldots\ldots\ldots(29)$$

Nos hemos limitado á establecer las fórmulas que dan un ángulo A en funcion de los lados, y las que dan un lado *a* en funcion de los ángulos; pero así como hemos determinado el ángulo A y su lado opuesto, bien sea procediendo sobre la respectiva fórmula fundamental, ó por simple permutacion de letras, pueden obtenerse cuatro fórmulas idénticas en el fondo á las (23) á (26) para determinar el ángulo B ó C, y cuatro fórmulas como las (27) á (30) para determinar los lados *b* y *c*. Por ejemplo:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,B=\sqrt{\frac{\text{sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-b)}}$$

es fórmula correspondiente á la (25) para el ángulo B, y

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\,c=\sqrt{\frac{-\cos. P \cos. (P-C)}{\cos. (P-A) \cos. (P-B)}}$$

es la correspondiente á la (29) para el lado *c*.

859.—Fórmulas para determinar los lados, en funcion de los ángulos y del exceso esférico.—Hemos visto que la suma de los tres ángulos A+B+C de un triángulo esférico, es mayor que 2 ángulos rectos y menor que 6. Ahora bien: *se llama exceso esférico la diferencia que hay entre la suma de los tres ángulos de un triángulo y* 180°.

Si representamos por ε este exceso, tendremos: