Entre la hipotenusa, un lado y el ángulo que forman

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } b=\text{tang. } a \text{ cos. } C\\ \text{tang. } c=\text{tang. } a \text{ cos. } B\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } \frac{1}{2}\,C=+\sqrt{\dfrac{\text{sen. }(a-b)}{\text{sen. }(a+b)}}\\ \text{tang. } \frac{1}{2}\,B=+\sqrt{\dfrac{\text{sen. }(a-c)}{\text{sen. }(a+c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(14)$$

Entre dos lados y un ángulo

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } b=\text{sen. } c \text{ tang. } B\\ \text{tang. } c=\text{sen. } b \text{ tang. } C\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(8)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } (45^\circ+\frac{1}{2}\,c)=\pm\sqrt{\dfrac{\text{sen. }(B+b)}{\text{sen. }(B-b)}}\\ \text{tang. } (45^\circ+\frac{1}{2}\,b)=\pm\sqrt{\dfrac{\text{sen. }(C+c)}{\text{sen. }(C-c)}}\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(15)$$

Entre dos ángulos y un lado.

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos. } B=\text{cos. } b \text{ sen. } C\\ \text{cos. } C=\text{cos. } c \text{ sen. } B\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } (45^\circ+\frac{1}{2}\,C)=\pm\sqrt{\text{cot. } \frac{1}{2}\,(B+b) \text{ cot. } \frac{1}{2}\,(B-b)}\\ \text{tang. } (45^\circ+\frac{1}{2}\,B)=\pm\sqrt{\text{cot. } \frac{1}{2}\,(C+c) \text{ cot. } \frac{1}{2}\,(C-c)}\end{array}\right\}\ldots.(16)$$

Entre dos ángulos y la hipotenusa

$$\text{cos. } a=\text{cot. } B \text{ cot. } C\ldots\ldots\ldots(11)$$

$$\left.\text{tang. } \frac{1}{2}\,a=+\sqrt{\dfrac{\text{cos. }(180^\circ-B-C)}{\text{cos. }(B-C)}}\right\}\ldots.(16\tfrac{1}{2})$$



Observacion.—Cuando se apliquen estas fórmulas para determinar uno de los elementos de un triángulo esférico, es preciso recordar que las hemos establecido suponiendo el radio de la esfera igual á la unidad, y para hacerlas homogéneas debe restituirse *r*, cuyo logaritmo en las tablas es 10. Si por ejemplo vamos á determinar el valor de la hipotenusa por medio de la fórmula (5)

$$\text{cos } a=\text{cos } b \text{ cos } c$$

debemos poner

$$\text{cos } a=\frac{\text{cos } b \text{ cos } c}{r}$$

Si vamos á determinar un lado por la fórmula (6)

$$\text{sen } b=\text{sen } a \text{ sen } B$$

debemos poner

$$\text{sen } b=\frac{\text{sen } a \text{ sen } B}{r}$$

y así en todas las demás fórmulas.

Nos ocuparemos en particular de la resolucion de cada caso.

869.—Primer caso.—Conociendo los dos lados *b*, *c*, determinar la hipotenusa *a* y los ángulos B, C.

La fórmula (5) da $\text{cos } a=\text{cos } b \text{ cos } c$

,, (8) $\text{tang } B=\dfrac{\text{tang } b}{\text{sen } c}$

,, (8) $\text{tang } C=\dfrac{\text{tang } c}{\text{sen } b}$

Repetimos que en las aplicaciones es preciso hacer homogéneas estas fórmulas introduciendo el factor *r*; y como las incógnitas *a*, B y C están dadas por el coseno y la tangente, no tienen más que un solo valor.

Cuando el valor de *a*, expresado por los cosenos de *b* y de *c* no se obtenga con suficiente aproximacion se calcularán primero B y C y se empleará la fórmula (10)

$$\text{cos } a=\text{cot } B \text{ cot } C.$$

870.—Segundo caso.—Dada la hipotenusa *a* y el lado *b*, se determinarán c, B y C por las fórmulas:

Ahora bien, siendo B O perpendicular á la vez á las rectas A O y C O lo será al plano A O C que las contiene, y por lo mismo cualquier plano B O C que pase por B O será perpendicular á A O C; luego C=90°

Supongamos pues $b$ difrente de B.

2° Sea b<90°

Como los ángulos deben ser de la misma especie que los lados opuestos se debe tener para que el triángulo sea posible B<90°, y ademas b<B para qus sea sen $a$<1 en la expresion sen a=$\frac{\text{sen b}}{\text{sen B}}$. Satisfechas estas condiciones, y siendo positivo cos $b$, la ecuacion cos $a$=cos $b$ cos $c$ muestra que $a$ y $c$ tienen que ser á la vez inferiores ó superiores á 90° y como ademas (853) el ángulo C debe ser de la misma especie que $c$ resulta que las tres incógnitas $a$, $c$ y C tendrán que ser juntamente obtusas ó á la vez agudas. En resúmen tendremos las dos resoluciones siguientes:

Primera b<90°, B<90°, a>90°, c>90°, C>90°

Segunda b<90°, B<90°, a'=180°—a, c'=180°—c, C'=180°—C

en la primera resolucion las tres incógnitas serán mayores que 90°, y en la segunda todas ellas serán menores.

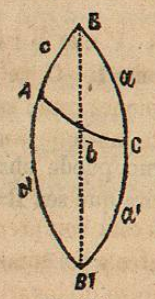
3° Sea b>90°

Las condiciones de posibilidad del problema son: B>90° y b>B, para que tratándose de arcos comprendidos entre 90° y 180° resulte $\frac{\text{sen b}}{\text{sen B}}$=sen a<1.

Una vez satisfechas estas condiciones siendo cos $b$ negativo, la ecuacion cos a=cos b cos c muestra que $a$ y $c$ son uno superior y el otro inferior á 90°. Además como el ángulo C tiene que ser de la misma especie que $c$; resulta que cuando $a$<90° tanto $c$ como C serán obtusos, y que cuando a>90° serán $c$ y C agudos. En resúmen tendremos las dos resoluciones siguientes:

Primera b>90°, B>90°, a<90°, c>90°, C>90°

Segunda b>90°, B>90°, a'=180°—a, c'=180°—c C'=180°—C.



(Fig. 398.)

Es fácil ver que exceptuando el caso de que $b$=B el problema admite dos resoluciones cuando el triángulo es posible. Supongamos en efecto que el triángulo A B C (fig. 398) rectángulo en A satisfega la cuestion y prolongando los lados A B y B C hasta su interseccion en B' se formará un segundo triángulo A B' C que satisfaerá igualmente la cuestion.



873.—Quinto caso.—Conociendo la hipotenusa $a$ y el ángulo oblícuo B, se calcularán $b$, $c$ y C por las fórmulas

$$\text{sen. } b=\text{sen. } a \text{ sen. B}, \quad \text{tang. } c=\text{tang. } a \text{ cos. B}, \quad \text{tang. C}=\frac{\text{cot. B}}{\text{cos. a}}$$

si el lado $b$ quedase mal determinado por su seno, se calcularán primero $c$ ó C y se obtendría en seguida $b$ por una de las fórmulas

$$\text{tang. } b=\text{sen. } c \text{ tang. B}, \qquad \text{tang. b}=\text{tang. a cos. C}$$

El problema siempre es posible y no admite más que una resolucion, porque la incógnita $b$ y el ángulo dado B son á la vez inferioras ó superiores á 90°.

874.—Sexto caso.—Estando dados los dos ángulos oblícuos B y C se calcularán los tres lados $a$, $b$ y $c$ por las fórmulas

$$\text{cos. a}=\text{cot. B cot. C}, \quad \text{cos. b}=\frac{\text{cos. B}}{\text{sen. C}}, \quad \text{cos. c}=\frac{\text{cos. C}}{\text{sen. B}}$$

ó mejor, para tener mas aproximacion, por las siguientes:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ a}=+\sqrt{\frac{\text{cos. }(180°-\text{B}-\text{C})}{\text{cos. }(\text{B}-\text{C})}} \quad \ldots\ldots\ldots (16\tfrac{1}{2})$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ b}&=+\sqrt{\text{tang.}\left(\frac{\text{B}+\text{C}}{2}-45°\right)\ \text{tang.}\left(\frac{\text{B}-\text{C}}{2}+45°\right)} \\ \text{tang. } \tfrac{1}{2}\text{ c}&=\sqrt{\text{tang.}\left(\frac{\text{B}+\text{C}}{2}-45°\right)\ \text{tang.}\left(\frac{\text{C}-\text{B}}{2}+45°\right)} \end{aligned}\right\} (15\tfrac{1}{2})$$

Para que el problema sea posible es necesario y basta: 1° que B+C esté comprendido entre 90° y 270°; 2° que la diferencia B—C esté comprendida entre —90° y +90°. Cuando estas condiciones están satisfechas, los valores son reales y el problema no admite mas que una sola resolucion.

875.—Observaciones.—Cuando alguno de los datos está comprendido entre 90° y 180° se sabe que los cosenos, las tangentes y las cotangentes de estos arcos son *negativas*, y para evitar el empleo de logarit-

mos de cantidades negativas, que son expresiones imaginarias, se buscan, segun lo hemos explicado en álgebra (337 IV), los logaritmos de las respectivas líneas trigonométricas como si fueran positivas, se ejecutan las operaciones indicadas, y despues de afectar el resultado conforme á las reglas del álgebra, del signo que le corresponda, se determina el cuadrante del arco á que pertenece.

Supongamos, por ejemplo, que se conozcan *b* y *c*, siendo

$$b>90^\circ \qquad y \qquad c<90^\circ;$$

los demas elementos del triángulo se calcularán por las fórmulas:

$$\cos. a=\cos. b \cos. c, \quad \text{tang.} B=\frac{\text{tang. } b}{\text{sen. } c}, \quad \text{tang. } C=\frac{\text{tang. } c}{\text{sen. } b}$$

por ser negativas las líneas *cos. b* y *tang. b* resultarán negativas *cos. a* y *tang. B*, de lo que se deduce que debe ser:

$$a>90^\circ, \qquad B>90^\circ, \qquad y \qquad C<90^\circ$$

cuyos resultados están de acuerdo con las condiciones demostradas (853); esto es, que debe ser $a>90^\circ$ cuando *b* y *c*, ó cuando B y C sean de distinta especie, así como que el lado del ángulo recto *c* sea de la misma especie que el ángulo C opuesto.

Observaremos por último que cuando una de las incógnitas está determinada por el logaritmo de su seno ó de su coseno, y que se obtiene para el correspondiente logaritmo un número mayor que 10, esto es un indicio cierto de que el triángulo es imposible, y que existe alguna contradiccion en los datos, lo cual puede muy bien suceder.

876.—Problemas. I.—Sean $a=115^\circ-17'-20''$
$B=98^\circ-28'-30''$

se buscan *b*, *c*, C.

Las fórmulas para determinarlos son:

$$\text{sen.} b=\text{sen.} a \text{ sen.} B, \quad \text{tang.} c=\text{tang.} a \cos. B, \quad \cot. C=\frac{\cos. a}{\cot. B}$$

pero como *a* y $B>90^\circ$, en las tablas no encontraremos sino los suplementos de sus valores.

$a'=180^\circ-a=64^\circ-42'-40''$ suplemento de *a*.
$B'=180^\circ-B=81^\circ-31'-30''$ ,, de B.



1° log. sen.a'= 9·956 2479
,, sen.B'= 9·995 2315
— ,, r =—10'
,, sen.b'= 9·951 4794.
b'= 63°—25'— 3"'5
como B>90°b =116°—34'—56"'5

2° log. tang.a'= 10'325 6344
,, cos. B'= 9'186 4322
— ,, r =—10
,, tang.c = 9'494 0666
siendo positiva c= 17°—19'—28"'6

3° log cos a' = 9'630 6135
Comp log cot B'= 10'826 7993
,, cot C = 10'457 4128
siendo posit. C = 19°-13'-45" '2

Verificacion.
cos *a'*=cos *b'* cos *c*
log cos b'= 9·650 7772
,, cos c = 9·979 8364
9'630 6136
a'= 64°—42'—40"
siendo neg. a =115°—17'—20"

Como $a>90^\circ$ debe tenerse $b>90^\circ$ y $c<90^\circ$; ademas $B>90^\circ$ y $C<90^\circ$.

II. Sean $b=56^\circ-37'-40''$
$B=84^\circ-29'-50''$

Se buscan a, c, C.

Las fórmulas que hay que emplear son:

$$\text{sen. } a=\frac{r \text{ sen. } b}{\text{sen. } B}, \quad \text{sen. } c=\frac{r \text{ tang. } b}{\text{tang. } B}, \quad \text{sen. } C=\frac{r \cos. B}{\cos. b}$$

1° log sen b =9'921 7461
Comp log sen B=0'002 0061
log sen a =9'923 7522
*a*= 57°— 1'—58"
ó *a*=122°—58'— 2"

2° log tang b= 10'181 3235
Comp log tang B= 8'983 7975
log sen c= 9'165 1210
c= 8°-24'-36"
ó bien c=171°-35'-24"

3° log cos B= 8'981 7915
Comp log cos b= 0'259 5774
log sen C= 9'241 3689
C= 10°—2'—22"
ó bien C=169°-57'—38"

Verificacion.
cos *a*=cos *b* cos *c*
log cos *b*= 9'740 4226
,, cos *c*= 9'995 3046
,, cos *a*= 9'735 7272
a= 57°- 1'-58"
ó a=122°-58'- 2"

El problema admite dos resoluciones:

$$1^a \begin{cases} a = 57^\circ - 1' - 58'' & A = 90^\circ \\ b = 56^\circ - 37' - 40'' & B = 84^\circ - 29' - 50'' \\ c = 8^\circ - 24' - 36'' & C = 10^\circ - 2' - 22'' \end{cases}$$

$$2^a \begin{cases} a = 122^\circ - 58' - 2'' & A = 90^\circ \\ b = 56 - 37' - 40 & B = 84 - 29 - 50 \\ c = 171 - 35 - 24 & C = 169 - 57 - 38 \end{cases}$$

### Resolucion de los triángulos rectiláteros.

877.—Casos y fórmulas para resolver los triángulos rectiláteros.—Aun cuando la resolucion de un triángulo rectilátero puede reducirse siempre á la de otro rectángulo haciendo uso del triángulo suplementario, pondremos en seguida las fórmulas que hemos demostrado (855) y que conviene aplicar en cada uno de los seis casos que pueden presentarse, limitándonos á esta indicacion en razon de que las observaciones y discusion á que dan lugar son las mismas que hemos hecho con motivo de los triángulos rectángulos.

El lado de 90° lo representaremos por $a$ y el ángulo opuesto por A.

Primer caso.—Conociendo A y B, se calcularán C, $b$ y $c$ por las fórmulas:

$$\cos. C = -\frac{\cos. A}{\cos. B}, \quad \text{sen.} b = \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } A}, \quad \cos. c = -\frac{\text{tang.} B}{\text{tang.} A}$$

Segundo caso.—Conociendo B y C, se calcularán A, $b$ y $c$ por las fórmulas:

$$\cos. A = -\cos. B \cos. C, \quad \text{tang.} b = \frac{\text{tang.} B}{\text{sen.} C}, \quad \text{tang.} c = \frac{\text{tang.} C}{\text{sen.} B}$$

Tercer caso.—Conociendo A, y $b$, se calcularán c, B y C por las fórmulas:

$$\text{sen.} B = \text{sen.} A \text{ sen.} b, \quad \text{tang.} C = -\text{tang.} A \cos. b, \quad \text{tang.} C = -\frac{\cot. b}{\cos. A}$$



Cuarto caso.—Conociendo $b$ y B, se calcularán c, A y C por las fórmulas:

$$\text{sen. } A = \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } b}, \quad \text{sen. } C = \frac{\text{tang.} B}{\text{tang.} b}, \quad \text{sen. } c = \frac{\cos. b}{\cos. B}$$

Quinto caso.—Conociendo B y $c$, se calcularán $b$, A y C por las fórmulas:

$$\cos. b = \cos. B \text{ sen.} c, \quad \text{tang.} A = -\frac{\text{tang.} B}{\cos. c}, \quad \text{tang.} c = \text{sen.} B \text{ tang.} c$$

Sexto caso.—Conociendo $b$ y $c$, se calcularán A, B y C por las fórmulas:

$$\cos. A = -\cot. b \cot. c, \quad \cos. B = \frac{\cos. b}{\text{sen. } c}, \quad \cos. C = \frac{\cos. c}{\text{sen. } b}$$

### Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

878.—El problema general que tiene por objeto, dados *tres* de los seis elementos $a$, $b$, $c$, A, B, C de un triángulo esférico, determinar los otros tres, exige que se tenga una relacion entre cuatro de estos elementos, lo cual da origen á seis casos esencialmente distintos; pero como por la consideracion del triángulo suplementario tres de ellos pueden reducirse á los otros tres, en rigor bastaría considerar tres casos. Sin embargo, por claridad y para mayor ejercicio trataremos los seis casos siguientes:

1° Dados tres lados, determinar los ángulos.
2° Dados tres ángulos, determinar los lados.
3° Dados dos lados y el ángulo que forman, determinar los demas elementos.
4° Dados dos ángulos y el lado adyacente, determinar los demas elementos.
5° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.
6° Dados dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} \qquad \text{sen } B = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a} \qquad \cos C = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a}$$

Pueden calcularse las incógnitas con más aproximacion por las fórmulas

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} c = + \sqrt{\text{tang } \tfrac{1}{2} (a-b) \text{ tang } \tfrac{1}{2} (a+b)} \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{\text{tang } \frac{1}{2} (a+b)}{\text{tang } \frac{1}{2} (a-b)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} C = + \sqrt{\frac{\text{sen } (a-b)}{\text{sen } (a+b)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Observacion.—Supuesto que $\text{sen } B = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } a}$, para que el problema sea posible, es necesario y basta que se tenga sen b<sen a, porque realizándose esta condicion el valor de sen B será menor que 1, y los valores de cos c y de cos C estarán comprendidos entre—1 y + 1. La desigualdad de que se trata,

$$\text{sen } b < \text{sen } a$$

como es fácil convencerse con el exámen de una figura, exige que se tenga:

Cuando $a < 90^\circ$ $\quad b < a$, ó bien $b > 180^\circ - a$,
Cuando $a > 90^\circ$ $\quad b > a$, ó bien $b < 180^\circ - a$
Cuando $a = 90^\circ$, necesariamente sen $b <$ sen $a$.

Satisfecha la condicion de posibilidad, el problema no admite más que una sola resolucion aun cuando el ángulo B esté dado por su seno, por que B debe ser de la misma especie que el lado $b$ conocido. (853) La misma consideracion permite fijar el signo con que debe tomarse el radical en la expresion de tang $(45^\circ + \frac{1}{2} B)$.

871.—Tercer caso.—Conociendo un lado c y el ángulo adyacente B, se determinarán C, $b$ y $a$ por las siguientes fórmulas:

$$\cos C = \cos c \text{ sen } B \qquad \text{tang } b = \text{sen } c \text{ tang } B \qquad \text{tang } a = \frac{\text{tang } c}{\cos B}$$



Si es necesario tener mayor aproximacion que la que proporciona el logaritmo del coseno, se calculará el ángulo C por una de las fórmulas:

$$\cot C = \frac{\cos a}{\cot B} \qquad \text{tang } C = \frac{\text{tang } c}{\text{sen } b}$$

El problema siempre es posible y no admite más que una sola resolucion.

872.—Cuarto caso.—Conociendo un lado $b$ y el ángulo opuesto B se determinarán C, $a$ y $c$ por medio de las siguientes fórmulas:

$$\text{sen } C = \frac{\cos B}{\cos b} \qquad \text{sen } a = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} \qquad \text{sen } c = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } B}$$

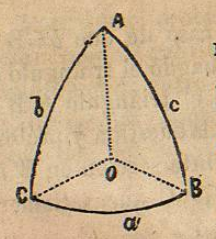
Si se quieren obtener las incógnitas por medio de las tangentes usaremos las expresiones:

$$\text{tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2} C) = \pm \sqrt{\cot \tfrac{1}{2} (B+b) \cot \tfrac{1}{2} (B-b)} \ldots\ldots\ldots (16)$$

$$\text{tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2} a) = \pm \sqrt{\frac{\text{tang } \frac{1}{2} (B+b)}{\text{tang } \frac{1}{2} (B-b)}} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\text{tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2} c) = \pm \sqrt{\frac{\text{sen } (B+b)}{\text{sen } (B-b)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Cualquiera de los dos sistemas precedentes de fórmulas puede dar para cada incógnita dos valores suplementarios, y por tanto es necesario saber cuáles de estos valores son correlativos y deben tomarse juntamente:



(Fig. 397).

1° Si se tiene $\quad b = B$
resulta $\quad \text{sen } C = \text{sen } a = \text{sen } c = 1$
y por esto $\quad C = a = c = 90^\circ$

y el triángulo será birectángulo, como puede observarse en la figura 397. En efecto para que sea B=b es necesario que A O B=c=90°
y que C O B=a=90°