El problema admite dos resoluciones:

$$1^a \begin{cases} a = 57^\circ - 1' - 58'' & A = 90^\circ \\ b = 56^\circ - 37' - 40'' & B = 84^\circ - 29' - 50'' \\ c = 8^\circ - 24' - 36'' & C = 10^\circ - 2' - 22'' \end{cases}$$

$$2^a \begin{cases} a = 122^\circ - 58' - 2'' & A = 90^\circ \\ b = 56 - 37' - 40 & B = 84 - 29 - 50 \\ c = 171 - 35 - 24 & C = 169 - 57 - 38 \end{cases}$$

Resolucion de los triángulos rectiláteros.

877.—Casos y fórmulas para resolver los triángulos rectiláteros.—Aun cuando la resolucion de un triángulo rectilátero puede reducirse siempre á la de otro rectángulo haciendo uso del triángulo suplementario, pondremos en seguida las fórmulas que hemos demostrado (855) y que conviene aplicar en cada uno de los seis casos que pueden presentarse, limitándonos á esta indicacion en razon de que las observaciones y discusion á que dan lugar son las mismas que hemos hecho con motivo de los triángulos rectángulos.

El lado de 90° lo representaremos por a y el ángulo opuesto por A.

Primer caso.—Conociendo A y B, se calcularán C, b y c por las fórmulas:

$$\cos. C = -\frac{\cos. A}{\cos. B}, \quad \text{sen.} b = \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } A}, \quad \cos. c = -\frac{\text{tang.} B}{\text{tang.} A}$$

Segundo caso.—Conociendo B y C, se calcularán A, b y c por las fórmulas:

$$\cos. A = -\cos. B \cos. C, \quad \text{tang.} b = \frac{\text{tang.} B}{\text{sen.} C}, \quad \text{tang.} c = \frac{\text{tang.} C}{\text{sen.} B}$$

Tercer caso.—Conociendo A, y b, se calcularán c, B y C por las fórmulas:

$$\text{sen.} B = \text{sen.} A \text{ sen.} b, \quad \text{tang.} C = -\text{tang.} A \cos. b, \quad \text{tang.} C = -\frac{\cot. b}{\cos. A}$$

Cuarto caso.—Conociendo b y B, se calcularán c, A y C por las fórmulas:

$$\text{sen. } A = \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } b}, \quad \text{sen. } C = \frac{\text{tang.} B}{\text{tang.} b}, \quad \text{sen. } c = \frac{\cos. b}{\cos. B}$$

Quinto caso.—Conociendo B y c, se calcularán b, A y C por las fórmulas:

$$\cos. b = \cos. B \text{ sen.} c, \quad \text{tang.} A = -\frac{\text{tang.} B}{\cos. c}, \quad \text{tang.} c = \text{sen.} B \text{ tang.} c$$

Sexto caso.—Conociendo b y c, se calcularán A, B y C por las fórmulas:

$$\cos. A = -\cot. b \cot. c, \quad \cos. B = \frac{\cos. b}{\text{sen. } c}, \quad \cos. C = \frac{\cos. c}{\text{sen. } b}$$

Resolucion de los triángulos oblicuángulos.

878.—El problema general que tiene por objeto, dados *tres* de los seis elementos a, b, c, A, B, C de un triángulo esférico, determinar los otros tres, exige que se tenga una relacion entre cuatro de estos elementos, lo cual da origen á seis casos esencialmente distintos; pero como por la consideracion del triángulo suplementario tres de ellos pueden reducirse á los otros tres, en rigor bastaría considerar tres casos. Sin embargo, por claridad y para mayor ejercicio trataremos los seis casos siguientes:

1° Dados tres lados, determinar los ángulos.
2° Dados tres ángulos, determinar los lados.
3° Dados dos lados y el ángulo que forman, determinar los demas elementos.
4° Dados dos ángulos y el lado adyacente, determinar los demas elementos.
5° Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.
6° Dados dos ángulos y el lado opuesto á uno de ellos, determinar los demas elementos.

cia. Una vez conocidos a y b se calculará C por alguna de las siguientes fórmulas:

$$\text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } A}{\text{sen. } a}, \quad \text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } B}{\text{sen. } b}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\cos. \frac{1}{2}(a-b)}{\cos. \frac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots (39)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots (40)$$

Es posible este problema cuando cada uno de los datos está comprendido entre 0° y 180°.

883.—Quinto caso.—Dados dos lados a, b y el ángulo A opuesto á uno de ellos, determinar B, C y c.

La fórmula
$$\frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } B} \ldots\ldots\ldots (2)$$

da
$$\text{sen. } B = \frac{\text{sen. } b \text{ sen. } A}{\text{sen. } a} \ldots\ldots\ldots (d)$$

Estando determinado B por un seno, por regla general podremos aceptar dos valores y despues de conocer B, determinaremos C sustituyendo el valor de ese ángulo y los de los datos en una de las fórmulas de Neper (39) ó (40) y despejando á cot. $\frac{1}{2}$ C, se tiene:

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(A+B) \cos. \frac{1}{2}(a+b)}{\cos. \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)} \ldots (e)$$

Para determinar á c nos valdremos de la fórmula (41) ó de la (42) de Neper y despejando á tang. $\frac{1}{2}$ c, se tiene:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(a+b) \cos. \frac{1}{2}(A+B)}{\cos. \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(a-b) \text{ sen. } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)} \ldots (f)$$

Para que el triángulo sea posible es necesario que con los datos del problema se obtenga: 1° sen. B igual ó menor que 1, supuesto que el valor máximo que puede tener el seno de un arco es el radio; 2° si $b>a$ debe tenerse $B>A$ y si $b<a$ debe tenerse $B<A$, supuesto que el mayor lado tiene que estar opuesto al mayor ángulo; y 3° los valores de cot. $\frac{1}{2}$ C y de tang. $\frac{1}{2}$ c tienen que ser positivos en razon de que debien-

do ser C y c menores que 180°, tanto $\frac{1}{2}$ C como $\frac{1}{2}$ c serán menores que 90°, y de que las cotangentes y las tangentes en el primer cuadrante, son positivas.

Así, pues, cuando con los datos del problema resulte sen. $B>1$ el triángulo es imposible. Cuando sen. $B=1$, será $B=90°$ y el triángulo será rectángulo en B. Cuando resulte sen. $B<1$, como el mismo seno corresponde á dos ángulos suplementarios, podremos tomar para B el valor que se encuentre en las tablas ó su suplemento, y para saber si podemos aceptar uno solo de estos dos valores de B, los dos, ó ninguno de ellos, bastará examinar si solo uno de esos valores, si los dos, ó ninguno de ellos satisfacen á la condicion de que si $b<a$, resulte $B<A$; y que si $b>a$, resulte $B>A$. Así pues, la comparacion de los valores de B con los de los datos a, b y A nos hará conocer si es posible el problema, y en caso de serlo si admite una sola ó dos resoluciones.

884.—Sexto caso.—Dados dos ángulos A, B y el lado a, opuesto á uno de ellos, determinar C, c y b.

De la fórmula (2) se deduce:

$$\text{sen. } b = \frac{\text{sen. } B \text{ sen. } a}{\text{sen. } A} \ldots\ldots\ldots [g]$$

Estando determinado b por un seno, por regla general podremos aceptar dos valores, y una vez conocido el lado b se determinará c y C por las fórmulas:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(a+b) \cos. \frac{1}{2}(A+B)}{\cos. \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(a-b) \text{ sen. } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)} \ldots (f)$$

$$\text{cot. } \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(A+B) \cos. \frac{1}{2}(a+b)}{\cos. \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B) \text{ sen. } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)} \ldots (e)$$

Para que el triángulo sea posible se necesita que sen. $b<1$ ó $=1$, que si $B>A$ resulte $b>a$, ó recíprocamente que si $B<A$ resulte $b<a$ y que tanto tang. $\frac{1}{2}$ c, como cot. $\frac{1}{2}$ C sean positivas. La comparacion de los valores de los resultados con estas condiciones hará conocer, lo mismo que en el quinto caso, si es posible el problema y si admite una ó dos soluciones.

885.—Discusion del quinto caso.—De lo que precede resulta que los dos últimos casos son los únicos que pueden tener dos resoluciones; pero que no siempre las admiten, y aun cuando las fórmulas que se refieren á estos casos son bastantes para dar á conocer los elementos desconocidos del triángulo, y por la comparacion de los valores de los re-

sultados con los de los datos siempre puede determinarse las soluciones que admite el problema, nos parece conveniente ocuparnos de su discusion; limitándola al quinto caso, porque siendo muy semejante al sexto, todo lo que digamos del uno puede aplicarse al otro con modificaciones que fácilmente hará el lector, con una poca de reflexion.

En el quinto caso hemos visto (883) que conocidos los elementos a, b y A se determinan B, C y c por las fórmulas (d), (c) y (f).

Si b=a la fórmula

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}\ldots\ldots\ldots\text{(d)}$$

da B=A

y sustituyendo estos valores en las fórmulas (e) y (f) se trasforman en

$$\text{cot. }\tfrac{1}{2}\text{ C=tang. A cos. a} \qquad \text{tang. }\tfrac{1}{2}\text{ c=tang.a cos. A}$$

Se ve pues, que cuando $b=a$ no hay mas que *un solo triángulo*, que resuelve la cuestion; mas para que sea posible es necesario que tanto cot. $\frac{1}{2}$ C, como tang. $\frac{1}{2}$ c sean positivas, á causa de que $\frac{1}{2}$ C y $\frac{1}{2}$ c son menores que 90°, lo cual á su vez exige que tang. A y que cos. a, así como tang. a y cos. A tengan el mismo signo, esto es, que a y el ángulo opuesto A sean á la vez mayores ó menores que 90°.

Pasemos á ocuparnos del caso general:

Ya hemos dicho que para que la cuestion sea posible

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen.a}}$$

debe ser igual ó menor que 1; y que si b<a debe tenerse B<A, y que si b>a debe tenerse B>A.

Ahora bien, como el ángulo B está dado por su seno y sabemos que el mismo seno corresponde á dos ángulos suplementarios, por regla general habrá dos valores de B que satisfacen la ecuacion

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}$$

uno, dado por las tablas, *menor* que 90° que llamaremos n, y otro N=180°—n mayor que 90°; pero teniendo presente que en todo triángulo al mayor lado está opuesto el mayor ángulo, esto es, sabiendo que cuando $b>a$ los valores de B han de ser forzosamente mayores que el ángulo conocido A, y que cuando $b<a$ los valores de B han de ser menores que A: comparando los valores n y N con los de los datos, se podrá decidir fácilmente si pueden aceptarse los dos valores, uno solo, ó ninguno de ellos, y por tanto si el problema admite dos soluciones, una sola ó ninguna.

Suponiendo que los elementos conocidos del triángulo sean A, b y a, con el objeto de ordenar nuestra discusion consideraremos que cada uno de estos datos sea sucesivamente *menor, igual y mayor* que 90° y determinarémos en cada combinacion si pueden tenerse dos soluciones, una ó ninguna.

1° Sea $\qquad A<90$ y $b<90°$

y supongamos sucesivamente que a sea menor, igual y mayor que b.

Si a<b debe tenerse B>A.

La fórmula $\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}$ por ser el factor $\frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}>1$

da á conocer B, ó su valor de las tablas

$n>$A y con mayor razon será el ángulo obtuso
N>A, por consiguiente habrá *dos soluciones.*

Si a=b debe tenerse B=A.

En este caso debiendo ser los dos valores de B menores 90°, supuesto que A es agudo, no podrá aceptarse el ángulo obtuso N, y por tanto el problema no tendrá mas de *una solucion.*

Si a>b debe tenerse B<A.

Podrá suceder que

$$a+b<180°,\ \text{que } a+b=180°\ \text{ó que a+b}>180°.$$

En el 1er. caso, $b<180°-a$ y recordando que b es agudo, será sen.b<sen. a, y la fórmula

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}\ \text{por ser}\ \frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}<1$$

dará $n<$A valor aceptable, por ser compatible con la condicion B<A.

En cuanto á N siendo obtuso seria mayor que A y por tanto inadmisible. El problema solo tiene *una resolucion.*

En el 2° caso cuando b=180°—a será sen. b=sen. a y la fórmula

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}} \quad \text{por ser} \quad \frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}=1$$

dará n=A, cuyo valor es inadmisible, supuesto que al ser a>b, debe tenerse B<A.

El valor N con mayor razon será inadmisible, y por tanto el problema no admite *ninguna resolucion.*

En el 3er. caso cuando b>180°—a, será sen. b>sen. a y la fórmula

$$\text{sen. B}=\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}} \quad \text{por ser} \quad \frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}>1$$

dará n>A valor inadmisible á causa de la condicion de que B<A y siendo N>n con más razon será inadmisible N, por lo cual el problema no admitirá *ninguna resolucion.*

En resúmen:

$$A<90^\circ,\quad b<90^\circ \begin{cases} a<b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{dos soluciones.} \\ a=b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{una} \quad ,, \\ a>b \begin{cases} a+b<180^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{una} \quad ,, \\ a+b=180^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{ninguna} \quad ,, \\ a+b>180^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{ninguna} \quad ,, \end{cases} \end{cases}$$

2° Siendo siempre A<90° sea b=90°

y supongamos sucesivamente que a sea menor, igual y mayor que b.
Si a<b debe tenerse B>A.

Por ser sen.b=1 y sen.a menor que 1, tendremos $\frac{\text{sen. b}}{\text{sen. a}}>1$

y la fórmula sen.B=$\frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. a}}$ dará para B por el valor de las tablas

n>A, resultado compatible con la condicion B>A, y con más razon lo será el de N. El problema admite pues, *dos soluciones.*

Si a=b, debe tenerse B=A.

Como A<90°, debia ser B agudo lo cual es inadmisible en razon de que siendo los lados a y b de 90° los planos que los contienen serán perpendiculares al tercer lado c y por tanto los ángulos A y B tendrian que ser rectos. El problema no admite *ninguna resolucion.*

Si a>b, debe tenerse B<A

$$\text{La fórmula sen B}=\frac{\text{sen b sen A}}{\text{sen a}}$$

$$\text{por ser} \frac{\text{sen b}}{\text{sen a}}=\frac{1}{1-x}>1 \text{ daria}$$

n>A y con más razon N>A, resultados que son incompatibles con la condicion que B<A; por lo cual el problema no admite *ninguna resolucion.*

3° Sea A<90° y b>90°

y supongamos sucesivamente que a sea menor, igual y mayor que b.

Si a<b, debe tenerse B>A.

Podrá suceder que

a+b<180°, que a+b=180°, ó que a+b>180°

En el 1er. caso; siendo b obtuso tendrá que ser a agudo y como b<180°—a será sen b>sen a. Entónces la fórmula

$$\text{sen B}=\frac{\text{sen b sen A}}{\text{sen a}} \quad \text{por ser el factor} \quad \frac{\text{sen b}}{\text{sen a}}>1 \text{ da}$$

n>A y con más razon N>A, resultados ambos compatibles con la condicion de que B>A; por lo cual el problema admite *dos soluciones.*

En el 2° caso, siendo a+b=180°, se tiene que b=180°—a, ó sen b=sen a.

$$\text{La fórmula sen B}=\frac{\text{sen b sen A}}{\text{sen a}} \text{ da}$$

n=A resultado inadmisible, porque debe obtenerse B>A. N>A será admisible, y el problema admitirá *una solucion.*

879.—Primer caso.—Dados los tres lados, se determinarán los ángulos por medio de las fórmulas (25) que hemos demostrado (857) y son:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p-b) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-a)}} \quad \ldots\ldots\ldots (25)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-c)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-b)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\text{sen. } (p-a) \text{ sen. } (p-b)}{\text{sen. } p \text{ sen. } (p-c)}}$$

en las que $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Para que el problema sea posible debe tenerse:

$$a+b+c<360^\circ; \qquad a<b+c, \qquad a>b-c.$$

880.—Segundo caso.—Dados los tres ángulos, se determinarán los lados por las fórmulas (33) que hemos demostrado (859) y son:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } (A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. } (B-\frac{1}{2}\varepsilon) \text{ sen. } (C-\frac{1}{2}\varepsilon)}} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } (B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. } (A-\frac{1}{2}\varepsilon) \text{ sen. } (C-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\text{sen. } \frac{1}{2}\varepsilon \text{ sen. } (C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\text{sen. } (A-\frac{1}{2}\varepsilon) \text{ sen. } (B-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

En las que $\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}(A+B+C) - 90^\circ$

Para que el problema sea posible debe tenerse:

$$\varepsilon<360^\circ, \qquad A>\tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad B>\tfrac{1}{2}\varepsilon, \qquad C>\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

881.—Tercer caso.—Conociendo dos lados *a*, *b* y el ángulo C que forman, se determinarán A, B y c, de la manera que sigue:

Las fórmulas ó analogías de Neper, (861) dan:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots (39)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{cot. } \tfrac{1}{2} C \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(a+b)} \ldots\ldots\ldots [40]$$

Una vez conocida la mitad de la suma $\frac{1}{2}(A+B)$ por la fórmula (39) y $\frac{1}{2}(A-B)$ por la fórmula (40) el ángulo mayor, que será el que esté opuesto al lado mayor, será igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y el ángulo menor será igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia. Conocidos los ángulos A y B, el lado *c* se calcula por la fórmula que se considere mas adecuada de las cuatro siguientes:

$$\text{sen. } c = \frac{\text{sen. } C \text{ sen. } a}{\text{sen. } A}, \qquad \text{sen. } c = \frac{\text{sen. } C \text{ sen. } b}{\text{sen. } B}$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(A+B)} \ldots\ldots\ldots (41)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B)} \ldots\ldots\ldots (42)$$

Este problema siempre es posible con tal que cada uno de los datos esté comprendido entre 0° y 180°.

882.—Cuarto caso.—Dados dos ángulos A, B y el lado adyacente *c*, determinar *a*, *b* y C.

Las fórmulas de Neper (861) dan:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{cos. } \frac{1}{2}(A+B)} \ldots\ldots\ldots (41)$$

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(A+B)} \ldots\ldots\ldots (42)$$

Determinadas las tangentes por las fórmulas (41) y (42) se conocerán los arcos, y conciendo la mitad de la suma y de la diferencia de los lados, el mayor, que es el opuesto al ángulo mayor, será igual á la suma de los valores dados por estas fórmulas, y el menor á su diferen-