$A=116^\circ-20'-2.''11$. Como $a>b$, debe ser $A>B$ y se toma el ángulo obtuso.

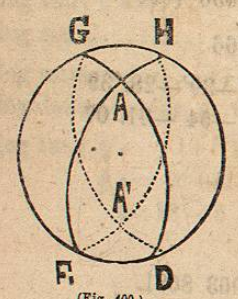
Comprobacion del cálculo por el del exceso esférico. La fórmula correspondiente es:

$$\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\ \varepsilon=\frac{\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\ a\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\ b\ \text{sen}\ C}{\cos\ \tfrac{1}{2}\ c}$$

$\frac{1}{2}\ a=56^c-31'-28.''3$	$\log \text{sen}\ \frac{1}{2}\ a=9'921\ 2296$	$A=116^\circ-20'-2.''1$
$\frac{1}{2}\ b=41-19-44.\ 2$	$\log \text{sen}\ \frac{1}{2}\ b=9'819\ 7946$	$B=\ 75-0-51\cdot 6$
$C=70-6-59.\ 2$	$\log \text{sen}\ C=9\cdot 973\ 3061$	$C=\ 70-6-59\cdot 2$
	$9'714\ 3303$	$261-27-52\cdot 9$
$\frac{1}{2}\ c=37-27-15.\ 54$	$\log \cos\ \frac{1}{2}\ c=9'899\ 7321$	-180
	$\log \text{sen}\ \frac{1}{2}\ \varepsilon=9'814\ 5982$	$81-27-52\cdot 9$
	$\frac{1}{2}\ \varepsilon=40^\circ-43'-56.''51$	$\varepsilon=81-27-53\cdot 02$
	$\varepsilon=81-27-53.\ 02$	Error $0-0-0\cdot 12$

Superficie de un triángulo esférico.

890.—Fórmula para calcular la superficie de un triángulo esférico.—Imaginémonos una esfera dividida por el círculo máximo H D E G en dos hemisferios, uno superior A H D E G, y otro inferior A' H D E G y que dos círculos máximos A D A' G y A E A' H se cortan en los puntos A y A' (fig. 400.)

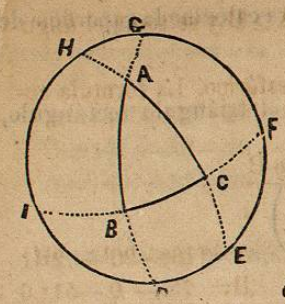


(Fig. 400.)

Vamos á demostrar que *la suma de la superficie de los triángulos* A D E *y* A H G *formados en el hemisferio superior por los semicírculos* H A E *y* D A G *es equivalente á la del huso* A D A' E A.

El triángulo H A G es igual al D A' E por tener un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales. El ángulo A=A' porque ambos están formados por los mismos planos. El lado A H=A' E porque uno y otro son suplementos de A E, y A G=A' D por suplementos de A D. Por tanto si al triángulo A D E agregamos los triángulos iguales A H G y A' D E, resulta:

sup. A D E+sup. A H G=sup. huso A D A' E A



(Fig. 401.)

Para determinar la expresion de la superficie de un triángulo esférico, consideraremos en la figura 401 el triángulo A B C. Si prolongamos sus lados hasta el círculo máximo D E F G H I que limita un hemisferio, y expresamos la equivalencia que hay entre la superficie de los triángulos y la de los husos formados en los tres ángulos del triángulo tendremos:

A D E+H A G=huso cuyo áng. es A
B F G+B D I=huso cuyo áng. es B
C H I+C E F=huso cuyo áng. es C

sumando ordenadamente estas ecuaciones vemos que la suma de los primeros miembros dan la superficie del hemisferio más dos veces la superficie del triángulo A B C que llamaremos s. En consecuencia tendrémos.

$$\tfrac{1}{2}\ \text{sup esfera}+2\ s=\text{huso A}+\text{huso B}+\text{huso C}\ldots\ldots\ldots(1)$$

Considerando que el huso es una parte de la superficie de la esfera cuyo valor depende del número de grados del ángulo del huso, su superficie puede determinarse por la proporcion:

$$360^\circ : A^\circ :: 4\ \pi\ r^2 : \text{sup. huso A}=\frac{4\ \pi\ r^2\ A}{360}$$

sustituyendo los valores respectivos en la ecuacion (1) resulta:

$$\tfrac{1}{2}\ 4\ \pi\ r^2+2s=\frac{4\ \pi\ r^2\ A}{360}+\frac{4\ \pi\ r^2\ B}{360}+\frac{4\ \pi\ r^2\ C}{360}$$

$$2\ s=\frac{4\ \pi\ r^2}{360}(A+B+C)-2\ \pi\ r^2$$

$$s=\frac{2\pi\ r^2}{360}(A+B+C)-\pi\ r^2=\pi\ r^2\left(\frac{A+B+C}{180}-1\right)$$

y por último $$s=\pi\ r^2\left(\frac{A+B+C-180^\circ}{180}\right)$$

Ahora como el exceso esférico $\varepsilon=A+B+C-180^\circ$ tendremos:

$$s=\pi\ r^2\times\frac{\varepsilon}{180}\ldots\ldots\ldots\ldots[47].$$

que es la fórmula que generalmente se usa para calcular la superficie de un triángulo esférico.

891.— Casos particulares.—1° Cuando el triángulo rectángulo, $A=90°$ y la fórmula [47] se convierte en

$$s=\pi r^2\left(\frac{B+C-90°}{180}\right)$$

2° Cuando el triángulo es equiángulo

$$\varepsilon=A+B+C-180=3\ A-180$$

y la fórmula (47) tomará la forma

$$s=\pi\ r^2\left(\frac{3\ A-180}{180}\right)$$

En este caso

si $A=90°$, $s=\pi\ r^2\left(\frac{270-180}{180}\right)=\frac{1}{2}\pi\ r^2=\frac{1}{8}$ sup. de la esfera.

Si $A=120°$, $s=\pi\ r^2\left(\frac{360-180}{180}\right)=\pi\ r^2=$sup. de un círculo máximo$=\frac{1}{4}$ sup. de la esfera.

3° Si se busca la superficie del triángulo polar de A B C

En la fórmula

$$s=\pi\ r^2\left(\frac{A+B+C-180}{180}\right)$$

sustituyendo los valores $A=180-a'$, $B=180-b'$, $C=180-c'$

se tendrá $s=\pi\ r^2\left(\frac{360-(a'+b'+c')}{180}\right)$

haciendo: $a'+b'+c'=2p'$

resulta: $s=\pi\ r^2\left(\frac{360-2p'}{180}\right)$

Cuando $a'=b'=c'=90°$ $s=\pi\ r^2\left(\frac{360-270}{180}\right)=\frac{1}{8}$ sup. de la esfera

892.—Aplicaciones.—I. Calcular la superficie de un triángulo esférico conocidos sus tres lados.

$a=131°-47'-20''$
$b=103\ -18\ -40$
$c=\ 49\ -32\ -20$ El radio$=1$

Hemos visto § 889 aplicacion I que con estos datos

$$\varepsilon=70°-19'-57''\ '72$$

sustituyendo en la fórmula (47) se tiene:

$$s=3'141\ 593\ \frac{70°-19'-57''\ '72}{180}$$

haciendo la division $\frac{70°-19'-57''\ '72}{180}=0'390\ 73707$

y por tanto

$$s=3'141\ 593\times 0'390\ 73707=1\overset{\text{m. cd.}}{'227\ 5166}$$

II. Calcular la superficie de un triángulo esférico, conociendo sus tres ángulos: $A=140°$, $B=92°$ y $C=68°$ y sabiendo que el diámetro de la esfera es de 30 piés

En este caso $\varepsilon=140°+92+68-180=120°$

y la fórmula (47) se convierte en

$$s=3'141\ 593\times 15^2\times\tfrac{2}{3}=\overset{\text{piés cd.}}{471\ '23895}.$$

III. Calcular la superficie de un triángulo equiángulo, siendo el radio de la esfera de 10 metros y cada ángulo de 120°

$$\varepsilon=A+B+C-180°=180°$$

y la fórmula $s=\pi\ r^2\ \frac{\varepsilon}{180}=3'141\ 593\times 100$

da $s=314'1593$ metros cuadrados.