INVESTIGACIÓN

ACERCA

de los errores que pueden cometerse en la medida de un ángulo por causas independientes del instrumento

POR

D. MANUEL MARROQUIN Y RIVERA

SOCIO DE NÚMERO.

Trabajo leido en la sesión del 24 de Abril de 1887.

Los errores que se pueden cometer en la apreciación de los diversos elementos que entran en una triangulación han preocupado siempre á los geómetras, los cuales han consagrado sus afanes, si no á hacer desaparecer estos errores, al menos á atenuar en cuanto sea posible sea su importancia propia, sea los efectos que puedan producir por sus combinaciones. Puede decirse que los estudios de este género tienen siempre una ventaja práctica, que consiste en dar á conocer la importancia de los errores y el grado en que debe temerse su influencia: de manera que si no siempre conducen á una regla por cuyo uso pueda el topógrafo ponerse en las mejores condiciones para llegar á un resultado exacto, al menos le hacen fijar su atención en una multitud de detalles que de otra manera tal vez hubieran pasado completamente desapercibidos.

Los errores de que me ocupo pertenecen á dos clases: los que se cometen en la medición de las líneas y los que afectan

á las medidas angulares. Estos últimos á su vez pueden dividirse en dos grupos, á saber: los que dependen del instrumento empleado, y los que se originan á consecuencia de la imperfección de su manejo. Entre estos figura como uno de los más importantes el que proviene de la falta de coincidencia del centro del instrumento con el centro de estación.

El estudio de la importancia de este error es el objeto del presente trabajo.

Sea, para entrar en materia (Fig. 1ª), A M C un ángulo que se quiere medir, y supongamos que en lugar de haber instalado el instrumento en el punto M se hizo centro en otro punto M′, más ó menos cercano, de manera que el ángulo medido fué A M′ C en lugar de A M C. Para conocer cuál es el error que se cometió, busquemos la diferencia A M′ C − A M C $= e$. Llamemos d á la distancia M M′, D al ángulo A M M′ que con el lado A M ó c forma la dirección M M′ en que se desvió el instrumento respecto al centro de estación, a al lado M C, M al ángulo A M C, M′ al ángulo que se obtuvo en el punto M′, H al ángulo A H C, y α y β á los ángulos M A M′ y M C M′.

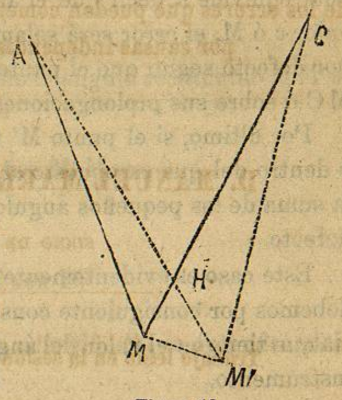

Figura 1ª

El ángulo H por ser externo en los triángulos A H M y M′ C H, tiene dos valores que igualados producen:

$$M + \alpha = M' + \beta$$

ecuación de la que se deduce

$$M' - M = e = \alpha - \beta.$$

Este mismo valor se encuentra para cualquiera otro punto situado como M′ fuera del ángulo formado por las líneas M A y M C ó sus prolongaciones, y es evidente que el error puede llegar á ser nulo, lo cual se verifica cuando el punto M′ está en el círculo que pasa por los tres puntos A, M y C: de manera que para un valor dado de la distancia d, hay dos posiciones para las cuales el ángulo M′ tiene el mismo valor que el ángulo M.

Si el punto M′ está sobre los lados a ó c del ángulo M, lo cual equivale á decir que el ángulo de dirección D tenga por valor c ó M, el error será solamente α ó β, y será por exceso ó por defecto según que el punto M′ esté sobre las líneas A M ó M C ó sobre sus prolongaciones.

Por último, si el punto M′ está en el interior del ángulo M ó dentro del que es opuesto al vértice, el error tiene por valor la suma de los pequeños ángulos α y β, y será por exceso ó por defecto.

Este caso es evidentemente el más desventajoso, y es el que debemos por consiguiente considerar, para estudiar la influencia que tiene en el valor del ángulo M la falta de centración del instrumento.

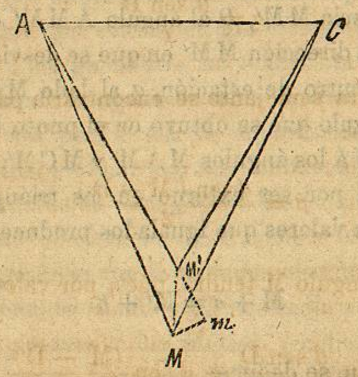

Figura 2ª

Para encontrar los valores de los ángulos α y β en la figura 2, tracemos del punto M una perpendicular al lado A M ó c

del ángulo M, la cual puede también suponerse perpendicular á la línea A M′ en razón de la pequeñez del ángulo α.

El triángulo M A m que puede considerarse isósceles da

$$\mathrm{M}m = 2\,\mathrm{AM}.\ \mathrm{sen}\ \tfrac{1}{2}\ \alpha$$

ó bien

$$\mathrm{M}m = \mathrm{AM}.\ \alpha \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots (1)$$

reemplazando el seno por el arco.

Considerando ahora el pequeño triángulo rectángulo M M′ m tendremos:

$$\mathrm{M}m = \mathrm{MM}'.\ \cos\ \mathrm{M}'\mathrm{M}m.$$

ó lo que es lo mismo:

$$\mathrm{M}m = d\ \mathrm{sen\ D}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1) se obtendrá, despejando á α.

$$\alpha = \frac{d\ \mathrm{sen\ D}}{c}$$

De una manera semejante se encontraría para el ángulo β el valor siguiente:

$$\beta = \frac{d\,\mathrm{sen}\ (\mathrm{M} - \mathrm{D})}{2}$$

El error del ángulo M tendrá, pues, por valor

$$e = \frac{d\ \mathrm{sen\ D}}{c} + d\ \mathrm{sen}\,\frac{(\mathrm{M}\ - \mathrm{D})}{a}$$

Necesitamos ahora investigar para qué valor del ángulo D tendrá su máximo e, y para esto debemos igualar á 0 el coeficiente diferencial de e con respecto á D, lo que nos suministra la ecuación de condición siguiente:

$$\frac{de}{dD} = \frac{d}{c} \cos \mathrm{D} + \frac{d}{a} \cos (\mathrm{M} - \mathrm{D}) = 0.$$

ó lo que es lo mismo

$$a \cos \mathrm{D} + c \cos (\mathrm{M} - \mathrm{D}) = 0,$$

que sale de la primera dividiendo esta por $\frac{d}{a\,c}$.

Todavía podemos transformar esta ecuación en la siguiente:

$$\frac{\cos \mathrm{D}}{\cos (\mathrm{M} - \mathrm{D})} = \frac{c}{a}$$

que nos enseña, que el error tendrá el valor más grande posible cuando la dirección M M′ en que está desviado el instrumento divida al ángulo M en dos partes, cuyos cosenos tengan la misma relación que los lados a y c del ángulo por medir.

Si suponemos que este pertenezca á un triángulo equilátero, como debe hacerse en cuanto sea posible en una triangulación practicada con esmero, los lados c y a serán iguales y la última ecuación se convierte en

$$\cos \mathrm{D} = \cos (\mathrm{M} - \mathrm{D}),$$

de donde se deduce:

$$\mathrm{D} = \tfrac{1}{2} \mathrm{M}.$$

Es decir, que en el caso de un triángulo equilátero el mayor error se comete cuando la desviación del instrumento es en el sentido de la bisectriz del ángulo.

Entonces, como es fácil convencerse, los dos ángulos α y β son iguales y el error e tiene por expresión:

$$e = \frac{2\,d \operatorname{sen} \frac{1}{2} \mathrm{M}}{a}.$$

ó atendiendo á que en el caso que consideramos el ángulo M vale 60°, y á que para tener el error e expresado en segundos, se debe dividir su valor por el seno de 1″.

$$e = \frac{2\,d \operatorname{sen} 30^\circ}{a \operatorname{sen} 1''},$$

fórmula sumamente fácil de calcular por logaritmos, si se atiende á que log. 2 sen. 30° = 10.

Por medio de esta fórmula he calculado la siguiente tabla, que permite conocer el error más grande que pueda cometerse en la medida de un ángulo, para diferentes valores de la desviación del instrumento y para diferentes valores de los lados de este ángulo.

LONGITUD DE LOS LADOS.

Desviaciones.	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000	6.000	7.000	8.000	9.000	10.000
0.^{m}01	2″.06	1″.03	0″.69	0″.52	0″.41	0″.34	0″.29	0″.26	0″.23	0″.21
0.^{m}02	4″.13	2″.06	1″.37	1″.03	0″.82	0″.69	0″.59	0″.51	0″.46	0″.41
0.^{m}03	6″.19	3″.09	2″.06	1″.55	1″.24	1″.03	0″.88	0″,77	0″.69	0″.62
0.^{m}04	8″.25	4″.13	2″.75	2″.06	1″.65	1″.37	1″.18	1″.03	0″.92	0″.82
0.^{m}05	10″.31	5″.15	3″.44	2″.58	2″.06	1″.72	1″.47	1″.29	1″.15	1″.03

Voy ahora á ocuparme de otra de las causas de error; á saber: de la falta de horizontalidad del limbo del instrumento.

Esta horizontalidad se obtiene por medio de un nivel que se pone en dos direcciones rectangulares. Si el nivel está perfectamente corregido; esto es: si es exactamente perpendicular á la columna del instrumento, el limbo graduado de éste quedará enteramente horizontal; pero si el nivel no está exactamente horizontal á la columna, es decir, si la burbuja estando en la parte media del tubo se desvía á uno ú otro extremo después de voltear 180° el instrumento, el círculo de éste quedará más ó menos inclinado sobre el horizonte. Sobre este plano inclinado están los dos lados del ángulo por medir, el cual resultará diferente del verdadero ángulo que es la proyección del primero sobre el horizonte. La diferencia, que es el error cometido, puede ser apreciada por la siguiente fórmula que sirve para reducir un ángulo al horizonte:

$$x = \left(\frac{a+a'}{2}\right)^2 \operatorname{tag} \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} 1'' - \left(\frac{a-a'}{2}\right)^2 \cot \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} 1'' \ldots (1)$$

Como debemos ponernos en las peores circunstancias es necesario investigar cuándo tendrá su máximo x, que representa el error del ángulo. Buscando la derivada de la ecuación anterior, primero con relación á a y después con relación á a', que representan los ángulos que hacen con el horizonte las dos visuales que forman el ángulo c, é igualando á 0 dichas derivadas se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{dx'}{da} = \frac{a+a'}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} 1'' - \frac{a-a'}{2} \cot \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} 1'' = 0.$$

$$\frac{dx'}{da} = \frac{a+a'}{2} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} 1'' + \frac{a-a'}{2} \cot \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} 1'' = 0.$$

Sumando y restando estas ecuaciones se obtienen las dos siguientes:

$$(a + a') \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} 1'' = 0,$$

$$(a - a') \cot \tfrac{1}{2} c \operatorname{sen} 1'' = 0.$$

De la primera se deduce:

$$a = -a'$$

y de la segunda

$$a = a'$$

Se vé, pues, que los ángulos formados por las dos visuales con el horizonte deben de tener el mismo valor absoluto para que el error cometido en el ángulo sea un máximo. Es, además, un máximo y no un mínimo el valor de x que corresponde á los valores encontrados para a y a', como puede fácilmente verse sustituyendo estos valores en la ecuación (1) y sin que haya necesidad de inspeccionar las segundas diferenciales.

Geométricamente este resultado manifiesta que para que el error cometido tenga su mayor valor, se necesita que las dos visuales que forman el ángulo estén simétricamente colocadas á uno y otro lado de la línea de mayor pendiente Cc (Fig. 3ª)

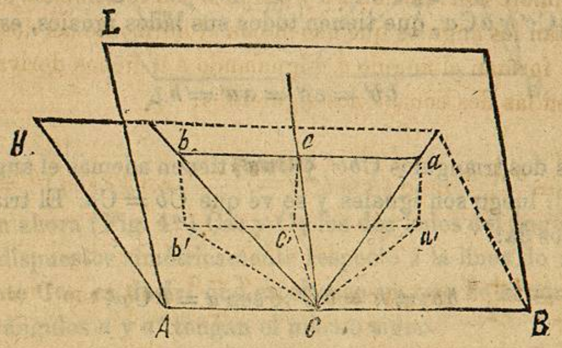

Figura 3ª

del plano inclinado del limbo, en el caso de que los pequeños ángulos a y a' tengan el mismo signo; y simétricamente colocadas con respecto á la perpendicular A B á la línea de mayor pendiente, en el supuesto de que a y a' tengan signos contrarios. Esto es fácil de probar si se atiende á que dos líneas tales como Cb y Ca que formen ángulos iguales con la línea de mayor pendiente deben hacer ángulos iguales con el horizonte.

Lo único que necesitamos conocer ahora es el valor común que esos ángulos tienen para un valor del error que se haya cometido en las dos direcciones rectangulares que sirven para nivelar el instrumento, y para un valor también dado del ángulo que se trate de medir. Supongamos que la burbuja del nivel se haya desviado una división después de voltear 180° el instrumento, y sean Cb y Ca (Fig. 3ª) las dos direcciones rectangulares en que se haya colocado el nivel. Estas líneas deben, por consiguiente, hacer con el horizonte un ángulo igual al valor angular de una división del nivel. Llamemos α á este valor y busquemos, en primer lugar, cuál es el ángulo formado por la línea de mayor pendiente con el horizonte. Para esto tracemos la horizontal ba en el plano inclinado y por un punto cualquiera. Esta horizontal corta á las tres líneas Cb, Cc y Ca en tres puntos b, c, y a, que proyectados sobre el plano horizontal dan otros tres puntos b', c' y a', y se forman tres triángulos rectángulos bCb', cCc' y aCa', que tienen todos sus lados iguales, es decir:

$$bb' = cc' = aa' = h.$$

Los dos triángulos Cbb', y Caa', tienen además el ángulo en C igual; luego son iguales y se vé que $Cb = Ca$. El triángulo Cbb' nos da:

$$bb' = h = bC \times \operatorname{sen} \alpha = bC\,\alpha,$$

atendiendo á la pequeñez del ángulo α.

El triángulo Ccc' nos da de la misma manera:

$$cc' = h = Cc\,i.$$

llamando i al ángulo cCc'.

Igualando estos dos valores de h y despejando á i se tiene:

$$i = \frac{Cb}{Cc}\,\alpha.$$

Si se atiende ahora á que el triángulo Ccb es rectángulo isósceles se verá que

$$i = \sqrt{2}\,\alpha.$$

Así es que la inclinacion respecto al horizonte de la línea de mayor pendiente del plano del limbo es igual al valor angular de una división del nivel multiplicada por $\sqrt{2}$.

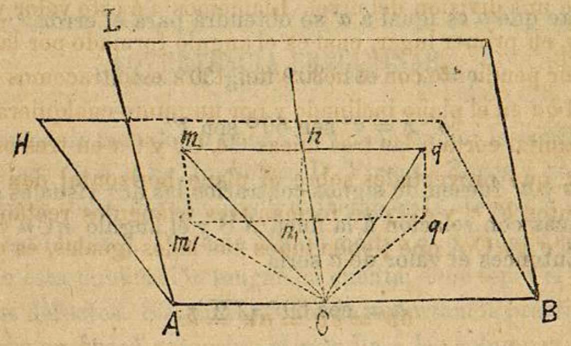

Figura 4ª

Sean ahora (Fig. 4ª) Cm y Cq los dos lados del ángulo por medir, dispuestos simétricamente respecto á la línea de mayor pendiente Cn; es decir: que es el caso en que se supone que los dos ángulos a y a' tengan el mismo signo.

El pequeño triángulo mCm', da:

$$h = Cm.\,\alpha. \quad \text{ó bien} \quad h = \alpha = \frac{h}{Cm}.$$

De la misma manera considerando el triángulo nCn', se tiene

$$h = Cn.\,i. \qquad \text{ó bien} \qquad Cm \cos mCn.\,i.$$

El ángulo $m\mathrm{C}n$ tiene por valor la mitad del ángulo medido ó sea 30° si adoptamos 60° por valor medio de los ángulos de una triangulación. Por consiguiente la última ecuación puede escribirse así:

$$h = \mathrm{C}m \cos 30^\circ.\ i.$$

Sustituyendo este valor en el de a se tendrá:

$a = \cos 30^\circ.\ i.$ ó lo que es lo mismo $a = \cos 30^\circ.\ \sqrt{2} \cdot a.$

poniendo en lugar de i su valor encontrado antes.

Introduciendo este valor de a en la ecuación (1), y teniendo presente que a es igual á a' se obtendrá para el error x:

$$x = 2\,a^2 \cos^2 30^\circ \operatorname{tang} 30^\circ \operatorname{sen} 1''$$

$$\text{ó} \quad x = a^2 \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 1''.$$

Si a y a' fuesen de signos contrarios las dos visuales serían simétricas con relación á la línea AB y el ángulo $m\mathrm{C}n$ valdría 60°. Entonces el valor de a sería

$$a = \cos 60^\circ \sqrt{2}\ a,$$

y el de x

$$x = 2\,a^2 \cos^2 60^\circ \cot 30^\circ \operatorname{sen} 1''$$

ó bien $\quad x = a^2 \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 1''$

lo mismo que antes.

Por medio de esta fórmula he calculado el mayor error que podía cometerse en la medida de un ángulo, admitiendo que el valor angular de las divisiones del nivel sea de 1′, y he encontrado que solamente es de 0″ 0037.

El error es sumamente pequeño y manifiesta lo inútil que es, hasta cierto punto, tomar un exceso de precauciones en la nivelación del instrumento.

DETERMINACION

del volumen, del peso
y del centro de gravedad de una columna toscana
arreglada á las dimensiones de Vignola

POR DON MIGUEL PÉREZ

SOCIO HONORARIO.

ADVERTENCIA PRELIMINAR.

El presente trabajo no es exclusivamente mío: le escribimos hace veinte años el Sr. Ingeniero D. Vicente Reyes y yo; juntos hicimos todos los cálculos y redactamos la Memoria, siendo ambos estudiantes. Por este último motivo que, ruego á los lectores de esta publicación tengan en cuenta, debe tener el trabajo serios defectos. Siendo el asunto de importancia práctica, ya me ocupo en hacer extensivo el estudio á las columnas de los diversos órdenes clásicos de Arquitectura, no ajustándolos á las dimensiones de Vignola, sino al método practicado actualmente en Europa. Esta nueva Memoria está también destinada á la Sociedad "Alzate."

MIGUEL PÉREZ.

Nos proponemos encontrar una fórmula por medio de la cual, conociendo el módulo de una columna toscana, podamos estar en aptitud de determinar su volumen y en consecuencia su peso.