El ángulo mCn tiene por valor la mitad del ángulo medido ó sea 30° si adoptamos 60° por valor medio de los ángulos de una triangulación. Por consiguiente la última ecuación puede escribirse así:

$$h = Cm \cos 30°. \, i.$$

Sustituyendo este valor en el de a se tendrá:

$$a = \cos 30°. \, i. \quad \text{ó lo que es lo mismo} \quad a = \cos 30°. \sqrt{2} . \, a.$$

poniendo en lugar de i su valor encontrado antes.

Introduciendo este valor de a en la ecuación (1), y teniendo presente que a es igual á a' se obtendrá para el error x:

$$x = 2\,a^2 \cos^2 30° \operatorname{tang} 30° \operatorname{sen} 1''$$

$$\text{ó} \quad x = a^2 \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 1''.$$

Si a y a' fuesen de signos contrarios las dos visuales serían simétricas con relación á la línea AB y el ángulo mCn valdría 60°. Entonces el valor de a sería

$$a = \cos 60° \sqrt{2} \; a,$$

y el de x

$$x = 2\,a^2 \cos^2 60° \cot 30° \operatorname{sen} 1''$$

ó bien $$x = a^2 \operatorname{sen} 60° \operatorname{sen} 1''$$

lo mismo que antes.

Por medio de esta fórmula he calculado el mayor error que podía cometerse en la medida de un ángulo, admitiendo que el valor angular de las divisiones del nivel sea de 1′, y he encontrado que solamente es de 0″ 0037.

El error es sumamente pequeño y manifiesta lo inútil que es, hasta cierto punto, tomar un exceso de precauciones en la nivelación del instrumento.

DETERMINACION

del volumen, del peso
y del centro de gravedad de una columna toscana
arreglada á las dimensiones de Vignola

POR DON MIGUEL PÉREZ

SOCIO HONORARIO.

ADVERTENCIA PRELIMINAR.

El presente trabajo no es exclusivamente mío: le escribimos hace veinte años el Sr. Ingeniero D. Vicente Reyes y yo; juntos hicimos todos los cálculos y redactamos la Memoria, siendo ambos estudiantes. Por este último motivo que, ruego á los lectores de esta publicación tengan en cuenta, debe tener el trabajo serios defectos. Siendo el asunto de importancia práctica, ya me ocupo en hacer extensivo el estudio á las columnas de los diversos órdenes clásicos de Arquitectura, no ajustándolos á las dimensiones de Vignola, sino al método practicado actualmente en Europa. Esta nueva Memoria está también destinada á la Sociedad "Alzate."

MIGUEL PÉREZ.

Nos proponemos encontrar una fórmula por medio de la cual, conociendo el módulo de una columna toscana, podamos estar en aptitud de determinar su volumen y en consecuencia su peso.

Para conseguirlo dispongamos nuestros ejes coordenados de tal manera, que el de las x pase por el eje de la columna y el de las y se halle aplicado á la parte inferior del zócalo de la base.

Claro es, pues, que sólo habrá por determinar la abscisa X, del centro de gravedad, pues éste está necesariamente sobre el eje de la columna á causa de la simetría de la figura.

Esto supuesto se tendrá evidentemente:

$$\text{Vol. columna} = \text{Vol. base} + \text{Vol. fuste} + \text{Vol. capitel} \ldots (1).$$

Ocupémonos desde luego de la determinación del volumen de la columna, pues de la expresión que así obtengamos podremos, conocida que sea la densidad de la substancia de que está construida, averiguar el peso y por último, apoyándonos en la teoría de los momentos, podremos fijar la posición del centro de gravedad.

Empecemos por calcular el volumen de la base que, como se sabe, consta de los volúmenes del zócalo, del toro y del listel. Se tendrá, pues:

$$\text{Vol. base} = \text{Vol. zócalo} + \text{Vol. toro} + \text{Vol. listel} \ldots\ldots (2).$$

La determinación del volumen del zócalo no presentará dificultad alguna, puesto que siendo el zócalo un paralelipípedo rectángulo se sabe, desde Geometría, que la expresión de su volumen es igual al producto de sus tres aristas contiguas; mas como en el caso que nos ocupa el sólido es de base cuadrada; llamando a el lado del cuadrado que le sirve de base y b la altura, se tendrá:

$$\text{Vol. zócalo} = a^2\, b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ahora bien, si representamos el módulo por m, al hacer una aplicación de la fórmula general que obtengamos, bastará po-

ner por m el valor que le convenga: esto supuesto, recordemos que las dimensiones del zócalo son

$$a = 2^{m}\, 9^{ps} = \frac{11\,m}{4} \qquad b = 6^{ps} = \frac{m}{2};$$

En tal virtud, la ecuación (3) se convierte en

$$\text{Vol. zócalo} = \left(\frac{11\,m}{4}\right)^2 \frac{m}{2} = \frac{121\,m^3}{32} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Para calcular el volumen del toro (Fig. 2), recordemos que este sólido es engendrado por la área mistilínea PM'MSQ alrededor del eje de las x. Se tendrá, en virtud del "Teorema de Guldin," que el volumen buscado es igual á la área generatriz, multiplicada por el camino que describe el centro de gravedad; pero la superficie generatriz es igual á la área del rectángulo PM'SQ, mas la del semicírculo M'MS, de modo que representando por r el radio del círculo y por b la ordenada OA de su centro, tendremos:

$$\text{Area PM'MSQ} = 2\,r\,b + \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4\,r\,b + \pi\,r^2}{2} \ldots\ldots (5)$$

Busquemos ahora la posición del centro de gravedad: es evidente que este punto en la figura 2, deberá encontrarse sobre el eje de las y puesto que este eje divide simétricamente á la área mistilínea PMQ. Para ello si tomamos los momentos de PMQ, de PM'SQ y de M'MS, tendremos:

$$\text{Mom}^{to}\ \text{PMQ} = \text{mom}^{to}\ \text{PM'SQ} + \text{mom}^{to}\ \text{M'MS} \ldots (6)$$

Pero el centro de gravedad del rectángulo PS se halla en el medio de su altura, es decir, á una distancia del eje de las x igual á $\frac{b}{2}$, se tendrá, pues;

$$\text{mom}^{to}\ \text{PM'SQ} = 2\,r\,b \times \frac{b}{2} = r\,b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Para tener el momento del semicírculo MNS, deberemos comenzar por fijar la posición de su centro de gravedad; obsérvese para ello, que cuando el origen está colocado en el centro del círculo, la ordenada del centro de gravedad de un sector tiene por expresión

$$y = \frac{\frac{2}{3}\,\text{radio} \times \text{cuerda}}{\text{arco}}$$

Mas cuando el sector se convierte en un semicírculo, la expresión anterior se transforma en

$$y = \frac{\frac{2}{3} r \times 2r}{\pi r} = \frac{\frac{4}{3} r^2}{\pi r} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

Luego cuando el centro del círculo esté á una distancia del eje de las x igual á b, la expresión de la ordenada del centro de gravedad del semicírculo será:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} + b = \frac{(3\pi b + 4r)}{3\pi}$$

Y tomando el momento con relación al eje de las x, se tendrá:

$$\text{Mom}^{\text{to}}\ \text{M}'\text{MS} = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{(3\pi b + 4r)}{3\pi} = \frac{r^2}{6}(3\pi b + 4r) \ldots (8)$$

Ahora bien, si llamamos y_1 la ordenada del centro de gravedad de la área mistilínea PMQ, se tendrá:

$$\text{Mom}^{\text{to}}\ \text{PMQ} = \frac{(4rb + \pi r^2)}{2} y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

En vista de las ecuaciones (7), (8) y (9), la (6) nos da:

$$\frac{(4rb + \pi r^2)}{2} y_1 = rb^2 + \frac{r^2}{6}(3\pi b + 4r)$$

Suprimiendo el factor común r á ambos miembros, resulta:

$$\frac{(4b + \pi r)}{2} y_1 = b^2 + \frac{r}{6}(3\pi b + 4r)$$

Haciendo desaparecer los denominadores, resulta:

$$3(4b + \pi r) y_1 = 6b^2 + r(3\pi b + 4r),$$

De donde se deduce

$$y_1 = \frac{6b^2 + r(3\pi b + 4r)}{3(4b + \pi r)}$$

De modo que en virtud del ya citado "Teorema de Guldin," se tendrá para el volumen del toro

$$\text{Vol. toro} = \frac{(4rb + \pi r^2)}{2}\, 2\pi \left(\frac{6b^2 + r(3\pi b + 4r)}{3(4b + \pi r)}\right)$$

ó bien

$$\text{Vol. toro} = \frac{\pi r}{3}[6b^2 + r(3\pi b + 4r)] \ldots\ldots (10)$$

Tal es, pues, la expresión general del volumen del toro, mas las dimensiones que tiene en el caso que nos ocupa son:

$$r = 2\tfrac{1}{2}\,\text{p}^{\text{s}} = \frac{5}{24}\,\text{m}, \quad b = 1^{\text{m}}\,2\,\text{p}^{\text{s}} = \frac{7\,\text{m}}{6};$$

valores que substituidos en la ecuación (10) nos dan

$$\text{Vol. toro} = \frac{\pi}{3}\,\frac{5m}{24}\left(6.\frac{49}{36}m^2 + \frac{5m}{24}\left(3\pi\frac{7}{6}m + 4.\frac{5}{24}m\right)\right)$$

$$= \frac{5\pi m}{72}\left(\frac{49m^2}{6} + \frac{5}{24}m\left(\frac{7\pi m}{2} + \frac{5}{6}m\right)\right)$$

$$= \frac{5\pi m}{72}\left(\frac{49m^2}{6} + \frac{35\pi m^2}{48} + \frac{25}{144}m^2\right) = \frac{5\pi m}{72}\left(\frac{1201m^2}{144} + \frac{35\pi m^2}{48}\right)$$

$$= \frac{6005\pi m^3}{10368} + \frac{175\pi^2 m^3}{3456}$$

ó bien

$$\text{Vol. toro} = \frac{6005\pi m^3}{10368} + \frac{175\pi^2 m^3}{3456} \ldots\ldots\ldots (11)$$

En cuanto al volumen del listel, obsérvese quo no es más que un pequeño cilindro cuya altura sea *1 parte* $= \frac{m}{12}$, y en el cual el radio de la base sea $1^m 1\frac{1}{2}^p = \frac{27}{24} m = \frac{9}{8} m$.

Se tendrá, pues,

$$\text{Vol. listel} = \pi \left(\frac{9}{8} m\right)^2 \frac{m}{12} = \frac{81\,\pi m^3}{768} \ldots\ldots\ldots (12)$$

En virtud de las ecuaciones (4), (11) y (12) la (2) se convierte en

$$\text{Vol. base} = \frac{121 m^3}{32} + \frac{6005\,\pi m^3}{10368} + \frac{175\,\pi^2 m^3}{3456} + \frac{81\,\pi m^3}{768}$$

$$= \frac{121 m^3}{32} + \frac{14197\,\pi m^3}{20736} + \frac{175\,\pi^2 m^3}{3456}$$

$$= m^3 \left(\frac{78408 + 14197\,\pi + 1050\,\pi^2}{20736}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Para determinar el centro de gravedad de la base estableceremos la ecuación

$$\text{Mom}^{\text{to}}\ \text{base} = \text{m}^{\text{to}}\ \text{zócalo} + \text{m}^{\text{to}}\ \text{toro} + \text{m}^{\text{to}}\ \text{listel} \ldots (14)$$

O bien designando por x', x'', x''' los brazos de palanca con que obran el zócalo, el toro y el listel, y por X_1 aquel con que obra la base total tendremos:

$$\text{Vol. base}.\ X_1 = \text{vol. zócalo}.\ x' + \text{vol. toro}.\ x'' + \text{vol. listel}.\ x''' (15)$$

Obsérvese ahora que estos cuerpos á causa de su simetría tienen sus respectivos centros de gravedad á la mitad de su altura: en tal virtud se tiene

$$x' = \frac{b}{2} = \frac{m}{4}, \quad x'' = b + r = \frac{m}{2} + \frac{5}{24} m = \frac{17}{24} m; \quad x''' = b + 2r + \frac{m}{24}$$

$$= \frac{m}{2} + \frac{5m}{12} + \frac{m}{24} = \frac{23}{24} m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

En vista de las ecuaciones (4), (11), (12), (13) y (16), la (15) se convierte en

$$m^3\, \frac{78408 + 14197\,\pi + 1050\,\pi^2}{20736}\, X_1 =$$

$$\frac{121}{32} m^3 \frac{m}{4} + m^3 . \frac{6005\,\pi + 525\,\pi^2}{10368} . \frac{17}{24} m + \frac{9\,\pi m^3}{256} . \frac{23}{8} m$$

Haciendo desaparecer los denominadores y suprimiendo el factor común m^3 quedará:

$$(78408 + 14197\,\pi + 1050\,\pi^2)\, 24\, X_1 = 363 \times 1296\, m + (6005\,\pi + 525\,\pi^2)\, 34\, m + 9 \times 23 \times 343 . \pi m,$$

ó bien

$$(78408 + 14197\,\pi + 1050\,\pi^2)\, 24\, X_1 = 470448\, m + 204170\,\pi m + 17850\,\pi^2 m + 50301\,\pi \text{m}.$$

Efectuando las reducciones quedará

$$(78408 + 14197\,\pi + 1050\,\pi^2)\, 24\, X_1 = 470448\, m + 254471\,\pi m + 17850\,\pi^2 m,$$

de donde

$$X_1 = \frac{470448\, m + 254471\,\pi m + 17850\,\pi^2 m}{24\,(78408 + 14197\,\pi + 1050\,\pi^2)} \ldots\ldots (17)$$

Tal es la expresión de la abscisa del centro de gravedad de la base.

Ocupémonos ahora de la determinación del volumen de la caña de la columna. Esta parte se compone del caveto inferior del fuste y del caveto superior. Se tendrá, pues:

$$\text{Vol. caña} = \text{Vol. cav. inf.} + \text{Vol. fuste} + \text{Vol. cav. sup.} \ldots (18)$$

El caveto inferior podemos considerarlo como engendrado por la revolución de la área mistilínea ABCD (fig. 3) al rededor del eje AB. Pero obsérvese que se tiene:

$$\text{vol. ABCD} = \tfrac{1}{2}\,\text{vol. AEFD} = \tfrac{1}{2}\,(\text{vol. AEFGD} - \text{vol. DGCF}) \quad (19)$$

Pero ya hemos encontrado

$$\text{Vol. AEFGD} = \frac{\pi r}{3}\Big(6\,b^2 + r\,(3\,\pi\,b + 4\,r)\Big) \ldots\ldots (20)$$

Designando b, la distancia OB y r el radio OC del círculo O. En cuanto al volumen engendrado por el círculo O, su expresión se determinará fácilmente por medio del ya citado "teorema de Guldin" que nos da

$$\text{Vol. DGFC} = \pi\,r^2.\ 2\,\pi\,b = 2\,\pi^2\,r^2\,b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

En vista de las ecuaciones (20) y (21), la (19) se convierte en

$$\text{Vol. ABCD} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi r}{3}\left(6\,b^2 + r\,[\,3\,\pi\,b + 4\,r\,]\right) - 2\,\pi^2\,r^2\,b\right)$$

$$= \frac{\pi r}{6}\Big(6\,b^2 + r\,(3\,\pi\,b + 4\,r)\Big) - \pi^2\,r^2\,b \ldots\ldots\ldots\ldots (21\ \text{bis})$$

Asignando á b y á r los valores que les corresponden, á saber: $b = \frac{9}{8}\,m$ .... y $r = \frac{1}{8}\,m$; resultará efectuando las operaciones:

$$\text{Vol. caveto} = \pi\,m^3\left(\frac{245}{1536} - \frac{9\,\pi}{1024}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Pasaremos á determinar el volumen del cuerpo de la columna suponiendo que sea un tronco de cono: designando por R y r los radios de las bases inferior y superior y por h la altura, tendremos la fórmula

$$V = \tfrac{1}{3}\,\pi\,h\,(R^2 + r^2 + R\,r).$$

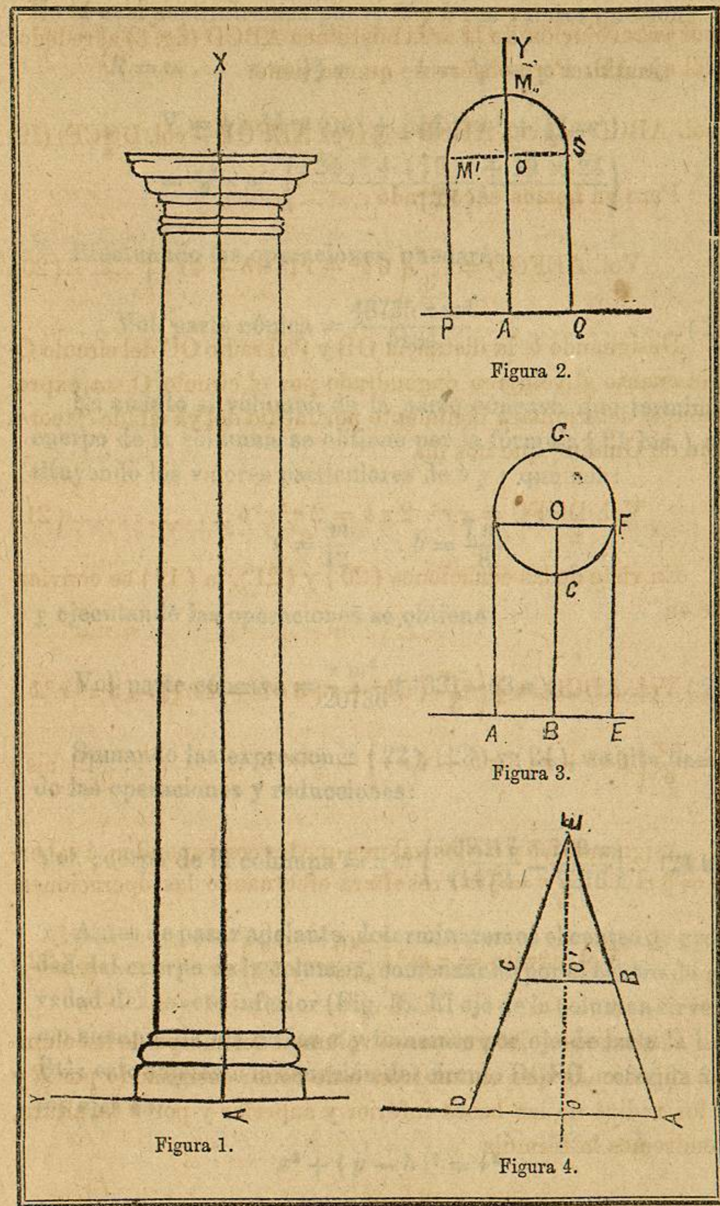

Figura 1.

Figura 2.

Figura 3.

Figura 4.

En la cual sustituiremos por r, R y h sus valores que son:

$$R = m \ldots\ldots r = \tfrac{19}{24}\, m \ldots\ldots h = \tfrac{35}{8}\, m,$$ y resultará:

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{3}\,\pi\,\tfrac{35}{8}\, m\left(m^2 + \left[\tfrac{19}{24}\right]^2 m^2 + \tfrac{19}{24}\, m^2\right)$$
$$= \tfrac{35}{9}\,\pi\, m^3 \left(\frac{(24)^2 + (19)^2 + 19 \times 24}{(24)^2}\right)$$

Efectuando las operaciones, quedará:

$$\text{Vol. parte cónica} = \frac{48755\,\pi\, m^3}{5184} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

En cuanto al volumen de la parte cóncava que termina el cuerpo de la columna, se obtiene por la fórmula (21 bis.), sustituyendo los valores particulares de b y r que son:

$$r = \frac{m}{12} \ldots\ldots b = \frac{7\, m}{8}$$

y ejecutando las operaciones se obtiene

$$\text{Vol. parte cóncava} = \frac{\pi\, m^3}{20736}\,(1331 - 63\,\pi) \ldots\ldots\ldots\ldots (24).$$

Sumando las expresiones (22), (23) y (24), resulta haciendo las operaciones y reducciones:

$$\text{Vol. cuerpo de la columna} = \pi\, m^3 \left(\frac{399317}{41472} - \frac{109\,\pi}{9216}\right) \ldots (24\ \text{bis.}$$

Antes de pasar adelante, determinaremos el centro de gravedad del cuerpo de la columna, comenzando por el centro de gravedad del caveto inferior (Fig. 3). El eje de la columna sirve como siempre de eje de las x y tomamos por eje de las y la línea BG: esto supuesto la ecuación del círculo DCFG, referida á estos ejes es:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Ahora bien, la fórmula que en Mecánica nos sirve para encontrar el centro de gravedad de un sólido de revolución comprendido entre dos planos perpendiculares al eje de las x, es:

$$x_{,}=\frac{\int x\,y^2\,d\,x}{\int y^2\,d\,x}$$

Despejando á y de la ecuación del círculo y elevándolo al cuadrado resulta:

$$y^2=b^2-2\,b\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2$$

Integrando por separado el numerador y denominador de la expresión citada, tendremos sucesivamente:

$$\int x\,y^2\,d\,x=\int(r^2\,x\,d\,x-x^3\,d\,x+b^2\,x\,d\,x-2\,b\,x\,d\,x\sqrt{r^2-x^2})$$

$$\int y^2\,d\,x=\int(r^2\,d\,x-x^2\,d\,x+b^2\,d\,x-2\,b\,d\,x\sqrt{r^2-x^2})$$

ó bien

$$\int x\,y^2\,d\,x=\frac{r^2\,x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{b^2\,x^2}{2}+\frac{2}{3}\,b\,(r^2-x^2)\,\tfrac{3}{2}$$

$$\int y^2\,d\,x=r^2\,x-\frac{x^3}{3}+b^2\,x-2\,b\int d\,x\sqrt{r^2-x^2}$$

Efectuando la integración indicada y tomando las integrales entre los límites $0.$ y $r.$ resulta:

$$\int x\,y^2\,d\,x=\frac{r^4}{2}-\frac{r^4}{4}+\frac{b^2\,r^2}{2}=\frac{r^2}{4}(r^2+2\,b^2)$$

$$\int y^2\,d\,x=r^3-\frac{r^3}{3}+b^2\,r=\frac{r}{3}(2\,r^2+3\,b^2).$$

Luego

$$x_1=\tfrac{3}{4}\,r\left(\frac{\frac{r^2}{4}(r^2+2\,b^2)}{\frac{2\,r^3}{3}+\frac{b\,r}{2}(2\,b-\pi\,r)}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(25)$$

Atribuyendo á b y á r los valores que les corresponden que son $b=\frac{9}{8}\,m\ldots.\;r=\frac{1}{8}\,m$, resulta:

$$x_{,}=\frac{489\,m^3}{6504.}$$

El valor de x, á que acabamos de llegar, está representado en la fig. 3 por B g.—Designando por x_2 el brazo de palanca Z G, con que obra respecto del origen general, se tendrá:

$$x_2=\mathrm{Z\,A}+\mathrm{A\,g}=\mathrm{Z\,A}+r-x^1=m+\frac{m}{8}-\frac{489\,m}{6504}$$

Y finalmente:

$$x^2=\frac{6828}{6504}\,m$$

Tomando el momento con respecto al origen Z resulta:

$$\text{Mom.}^{\text{to}}\ \text{descanso}=\frac{6828\,\pi\,m^4}{6504}\left(\frac{245}{1536}-\frac{9\,\pi}{1024}\right)\ldots\ldots\ldots(26)$$

En cuanto al momento de la parte cónica, lo obtendremos toda vez que conozcamos la posición del centro de gravedad de un tronco de cono, á cuyo efecto emplearemos la fórmula

$$d=\tfrac{1}{4}\,h\,\frac{(R+r)^2+2\,r^2}{(R+r)^2-R\,r}$$

que nos hace conocer la distancia del centro de la base mayor al centro de gravedad. Pasemos á demostrarla.

Sea, pues (fig. 4), ABCD un tronco de cono, que puede ser