considerado como la diferencia entre los conos ADE y BCE, teniendo en consecuencia

$$\text{Mom}^{\text{to}}\ ABCD = \text{Mom}^{\text{to}}\ AED - \text{mom}^{\text{to}}\ BCE \ldots (27)$$

Llamando x la altura OE, los triángulos semejantes AOE y BO′E nos dan

$$AO : BO' :: OE : O'E$$

ó bien

$$R : r :: x : x - h$$

de donde

$$r x = R x - R h$$

y

$$x = \frac{R h}{R - r}$$

En consecuencia

$$\text{Mom}^{\text{to}}\ AED = \pi R^2 . \tfrac{1}{3} x . \tfrac{1}{4} x = \frac{\pi R^2}{12} . \frac{R^2 h^2}{(R-r)^2}$$

ó bien

$$\text{Mom}^{\text{to}}\ AED = \frac{\pi R^4 h^2}{12 (R - r)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

De la misma manera se tiene

$$\text{Mom}^{\text{to}}\ BCE = \pi r.^2 \tfrac{1}{3} (x - h) [h + \tfrac{1}{4} (x - h)]$$

$$= \frac{\pi r^3 h^2}{12 (R-r)^2} (4 R - 3 r) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29).$$

Designando por d la distancia del centro de gravedad del tronco de cono, á su base mayor, tendremos:

$$\text{Mom}^{\text{to}}\ ABCD = \tfrac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + r R) d \ldots\ldots\ldots\ldots (30).$$

En atención á las ecuaciones (28), (29) y (30), la (27) nos dá:

$$\tfrac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + R r) d = \frac{\pi R^4 h^2}{12 (R - r)^2} - \frac{\pi r^3 h^2}{12 (R - r)^2} (4 R - 3 r).$$

Suprimiendo en ambos miembros el factor común $\frac{\pi h}{3}$, resulta:

$$[(R + r)^2 - R r] d = \frac{R^4 h}{4 (R - r)^2} - \frac{r^3 h}{4 (R - r)^2} (4 R - 3 r)$$

$$= \frac{h}{4 (R - r)^2} (R^4 - 4 R r^3 + 3 r^4).$$

Efectuando en el segundo miembro la división por $(R - r)^2$ y despejando á , tendremos:

$$d = \frac{h}{4} \frac{(R + r)^2 + 2 r^2}{([R + r]^2 - R r)}$$

Asignando á R, r y h los valores correspondientes que son:

$$R = m \ldots\ r = \frac{19\, m}{24} \ldots\ h = \frac{35\, m}{3};$$

resultará hechas todas las operaciones

$$d = \frac{4285\, m}{796.}$$

Así es que designando por x_3 el brazo de palanca con respecto al origen general, se tiene

$$x_3 = m + \frac{m}{8} + \frac{4285\, m}{796} = \frac{10361\, m}{1592.}$$

Luego el momento será:

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ parte cónica} = \frac{505150555\,\pi\,m^4}{8252928.} \ldots\ldots\ldots\ldots (31).$$

En cuanto al centro de gravedad de la parte cóncava que termina el cuerpo de la columna, se determinará por la fórmula (25) en la que haremos

$$r = \frac{m}{12} \,..\, b = \frac{7\,m}{8}$$

resultando

$$x_{,} = \frac{127\,m}{3082}$$

y llamando x_4 el brazo de palanca con que obra, tendremos

$$x_4 = m + 12\,m - \frac{5\,m}{24} + \frac{127\,m}{3082} = \frac{474611\,m}{36984}$$

Y tomando el momento tendremos

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ parte cóncava} = \frac{474611\,\pi\,m^4}{766900224}(1331 - 63\,\pi) \ldots\ldots (32)$$

Fundándonos siempre en la teoría de los momentos,

Mom.$^{\text{to}}$ cuerpo de la columna = Mom.$^{\text{to}}$ descanso + mom.$^{\text{to}}$ parte cónica + Mom.$^{\text{to}}$ parte cóncava.

ó bien en vista de las ecuaciones (26), (31) y (32) y llamando X_2 la abscisa del centro de gravedad del cuerpo de columna, se tiene

$$\pi\,m^3 \frac{399317}{41472} - \frac{109\,\pi}{9216} X_2 =$$

$$\frac{9867\,\pi\,m^4}{9280}\left(\frac{245}{1536} - \frac{9\,\pi}{1024}\right) + \frac{505250555\,\pi\,m^4}{8252928} +$$

$$\frac{474611\,\pi\,m^4}{766900224}(1331 - 63\,\pi)$$

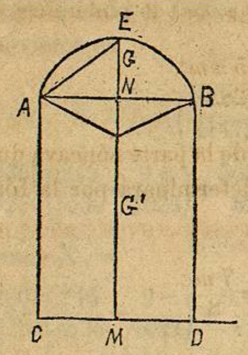
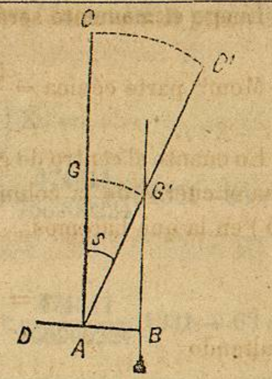


Figura 4 (bis).



Figura

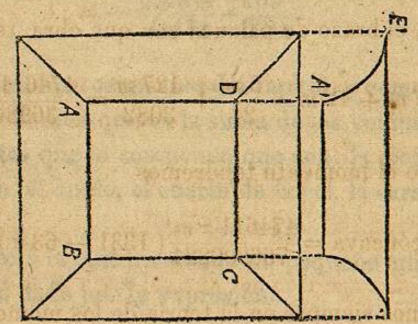


Figura 5.

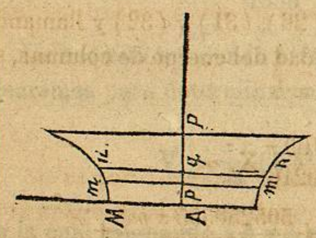


Figura 6.

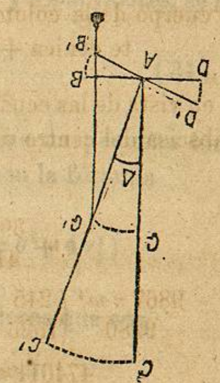


Figura 8

Suprimiendo el factor común $\pi m,^3$ la ecuación precedente se convierte en

$$\left(\frac{399317}{41472}-\frac{109\,\pi}{9216}\right)X_2 =$$

$$m\,\frac{9867}{9280}\left(\frac{245}{1536}-\frac{9\,\pi}{1024}\right)+\frac{505150555}{8252928}+\frac{474611}{766900224}(1331-63\,\pi)$$

de donde $X_2 =$

$$\frac{m\,\frac{9867}{9280}\left(\frac{245}{1536}-\frac{9\,\pi}{1024}\right)+\frac{505150555}{8252928}+\frac{474611}{766900224}(1331-63\,\pi)}{\frac{399317}{41472}-\frac{109\,\pi}{9216}} \quad (33).$$

Pasemos ahora á ocuparnos del capitel; y comenzaremos por calcular su volumen que es la suma de los volúmenes de las diferentes partes que lo componen que son: la cintura, la baqueta, el collarín, el anillo, el cuarto de bocel, la cara y el listel del ábaco.

En cuanto á la cintura siendo un pequeño cilindro, su volumen nos será dado por la expresión.

$V = \pi r^2 h$, ó bien atribuyendo á r y h sus valores, se tendrá:

$$\text{Vol. cintura} = \frac{49\,\pi\,m^3}{1536} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (34).$$

La baqueta no siendo otra cosa que un pequeño toro, emplearemos para determinar su volumen la fórmula

$$V = \frac{\pi r}{3}\left(6\,b^2 + r\,[3\,\pi\,b + 4\,r]\right)$$

en la cual asignando á b y á r sus valores que son

$$b = \frac{7}{8}m \ldots\ldots r = \frac{m}{24}$$

resulta:

$$\text{Vol. baqueta} = \frac{1325\,\pi\,m^3}{20736} + \frac{7\,\pi^2\,m}{4608} \cdots\cdots\cdots (35).$$

El volumen del collarín nos será dado por la expresión:

$$\text{Vol. collarín} = \frac{361\,\pi\,m^3}{1728} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (36).$$

En cuanto al anillo, tendremos también:

$$\text{Vol. anillo} = \frac{49\,\pi\,m^3}{768} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37).$$

Calculemos ahora el volumen del "cuarto de bocel," impropiamente (llamado "cuarto de círculo.)"

Parecería á primera vista, que tan sólo bastaría tomar la mitad del volumen de un toro; mas no siendo el arco de círculo un cuadrante, como lo manifiesta la construcción gráfica, precisados nos vemos á seguir otro camino. Sea (fig. 4 bis) CAEBD la área generatriz y veamos cuál es la posición de su centro de gravedad.

Podremos considerarla como descompuesta en el rectángulo ABDC, más el segmento AEB; la área del rectángulo es conocida, así como la posición de su centro de gravedad; tan sólo nos ocuparemos del segmento cuya área es á su vez la diferencia entre las áreas del sector OAEB y del triángulo AOB.

El triángulo rectángulo AEN, nos da:

$$AE = \sqrt{\overline{AN}^2 + \overline{NE}^2} = \sqrt{m^2\left(\frac{1}{16} + \frac{121}{(48)^2}\right)} = \frac{m}{48}\sqrt{265}$$

$$= \frac{16{,}28\,m}{48} = \frac{407\,m}{1200}$$

El mismo triángulo rectángulo nos da:

$$\text{tang. } AEN = \frac{\frac{m}{4}}{\frac{11\,m}{48}} = \frac{12}{11} = \text{tang, } AEO$$

de donde

$$AEO = 47.^\circ\, 29.'\, 22.''$$

Del triángulo isósceles AEO se saca:

$$AO = \frac{AE \text{ sen } AEO}{\text{sen } AOE} = \frac{407\,m}{1200}\,\frac{\text{sen } 47^\circ\, 29'\, 22''}{\text{sen } 85^\circ\, 1'\, 16''} = 0{,}25096\,m$$

La magnitud del arco ACB nos será dada por la proporción:

$$360^\circ : 2\,\pi\,r :: 170{,}^\circ 043 : AEB = 0{,}74481\,m.$$

A su vez el triángulo isósceles AOB nos da:

$$AB = \frac{AO \text{ sen } 170^\circ\, 2'\, 32''}{\text{sen } 4^\circ\, 58'\, 44''} = 0{,}50013\,m.$$

La área del sector será en consecuencia:

$$\text{Area sector} = \tfrac{1}{2}\,r \times 0.74481\,m = 0{,}09346\,m.^2$$

Se tendrá igualmente:

$$\text{Area triáng. } AOB = \tfrac{1}{2}\,AO^2 \text{ sen } AOB = 0{,}00054456\,m^2$$

De donde deducimos:

$$\text{Area segmento} = 0{,}0929\,m.^2$$

Por otro lado se tiene:

$$\text{Area rectáng. } ABDC = \frac{7}{16}\,m.^2 = 0{,}4375\,m.^2$$

Sumando las dos últimas expresiones tendremos:

$$\text{Area } AEBDC = 0{,}5304\,m.^2$$

La distancia del centro del círculo al centro de gravedad del segmento, representada por OG, nos es dada por la expresión;

$$OG = \frac{AB^3}{12\,AEB} = 0{,}11221\,m.$$

Por otra parte se tiene:

$$\mathrm{MO} = \mathrm{ME} - \mathrm{EO} = 0{,}85321\, m;$$

y en consecuencia:

$$\mathrm{MG} = \mathrm{MO} + \mathrm{OG} = 0{,}96542\, m.$$

Siendo G′ el centro de gravedad del rectángulo ABDC,

se tiene .... $\mathrm{MG}' = \frac{7}{16} m = 0{,}4375\, m.$

Llamando x_1 el brazo de palanca del centro de gravedad de la área total, y tomando los momentos tendremos:

Mom$^{\text{to}}$ área total = Mom$^{\text{to}}$ rectáng. + Mom$^{\text{to}}$ segmento,

ó bien

$$0{,}5304\, m^2 x_1 = (0{,}4375)^2 m^3 + 0{,}0929 \times 0{,}96542\, m.^3$$

de donde:

$$x_1 = 0{,}52996\, m.$$

Aplicando el teorema de Guldín tendremos:

2 vol. "cuarto de bocel" = $0{,}5304\, m^2 \times 0{,}52996 \times 2\pi m,$

de donde:

Vol. "cuarto bocel" = $0{,}281090784\, \pi m^3$......... (38).

Nos ocuparemos del volumen del ábaco: Si consideramos la porción comprendida desde la base inferior del ábaco al arranque, digámoslo así de las partes cilíndricas, tendremos que el volumen de ese paralelipípedo rectángulo será:

$$\frac{27}{32} m.^3$$

En cuanto á la porción que termina la parte superior de la cara del ábaco, su volumen nos será dado por la expresión:

$$\mathrm{V} = \tfrac{4}{3} r (3 [a + r]^2 + 2 r^2)$$

En la cual haciendo $r = \frac{m}{12}$, $a = \frac{9}{8} m$, resultará:

$$\mathrm{V} = \frac{3531\, m^3}{5184}$$

En consecuencia:

Vol. cara del ábaco = $\left(\frac{27}{32} + \frac{2531}{5184}\right) m^3 = \frac{6905\, m^3}{5184}$.... (39).

Vol. listel = $\frac{841\, m^3}{1728}$.................................(40).

Sumando las expresiones (39) y (40), resulta:

Vol. ábaco = $\frac{2357\, m^3}{1296}$................................(41).

Sumando las expresiones que dan los volúmenes de las diferentes partes del capitel, se obtiene:

Vol. capitel = $2{,}4979377582532\, m^3$.....................(42).

Valuando en fracción decimal la expresión del volumen del cuerpo de la columna, resulta:

Vol. cuerpo columna = $30{,}1323854937780\, m^3$....... (43).

Procediendo de una manera análoga para la ecuación (13), tendremos:

Vol. base = $6{,}4319191248167\, m^3$.................. (44).

La suma de las expresiones (42), (43) y (44), dará por resultado:

Volumen de la columna = $39{,}0622423768479\, m^3$.... (45).

Para encontrar el centro de gravedad del capitel, tomaremos los momentos de sus diferentes partes, con relación al origen general y quedará:

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ cintura} = \pi \frac{49\, m^3}{1536} \times \frac{619\, m}{48}$$

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ baqueta} = \left(\frac{1325}{20736} \times \frac{7\pi}{4608}\right) \cdot \frac{311\, \pi\, m^4}{24}$$

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ collarín} = \frac{361}{1728} \times \frac{79\, \pi\, m^4}{6}$$

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ anillo} = \frac{49}{768} \times \frac{107\, \pi\, m^4}{8}$$

Para determinar el centro de gravedad del "cuarto de círculo," emplearemos la conocida fórmula:

$$x_{,} = \frac{\int x\, y^2\, d x}{\int y^2\, d x} \quad \ldots\ldots (46).$$

Calcularemos separadamente el numerador y denominador de esta expresión:

La ecuación del círculo es $x^2 + (y - q)^2 = r^2$; de donde se saca: $y^2 = q^2 + 2q\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2$; valor que sustituído en el numerador y donominador de la ecuación (46), da:

$$\int x\, y^2\, d x = q^2 \frac{x^2}{2} + \frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + 2q \int x\, d x \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\int y^2\, d x = q^2 x + r^2 x - \frac{x^3}{3} + 2q \int d x \sqrt{r^2 - x^2}$$

Por otra parte se tiene:

$$\int x\, d x \sqrt{r^2 - x^2} = \int x\, d x \left(r - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{r}\right) = \frac{r x^2}{2} - \frac{r^4}{8r}$$

$$\int d x \sqrt{r^2 - x^2} = \int d x \left(r - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{r}\right) = r x - \frac{r^3}{6r}$$

En consecuencia:

$$\int x\, y^2\, d x = q \frac{^2 x^2}{2} + \frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + q r x^2 - \frac{q x^4}{4r}$$

$$\int y^2\, d x = q^2 x + r^2 x - \frac{x^3}{3} + 2 q r x - \frac{q x^3}{3r}.$$

Luego:

$$x_{,} = \tfrac{3}{4} \cdot \frac{2 q^2 r x^2 + 2 r^3 x^2 - r x^4 + 2 q r^2 x^2 - q x^4}{3 q^2 r x + 3 r^3 x - r x^3 + 6 q r^2 x - q x^3}$$

Poniendo por q, r y x sus valores que son $q = 0{,}85321\ m$, $r = 0{,}25096\ m$, $x = 0{,}25\ m$, resulta, hechas todas las operaciones:

$$x_{,} = 0{,}09619168\ m.$$

En consecuencia el brazo de palanca respecto del origen general, será:

$$13{,}57047498\ m.$$

Luego:

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ " cuarto de círculo} = 0{,}281090784\, \pi\, m^3 \times 13{,}57047498\ m.$$

Para conocer el centro de gravedad de la parte que termina la cara de ábaco, comenzaremos por establecer la fórmula que nos ha de servir para este objeto.

Debe este cuerpo ser considerado (fig. 5) como engendrado por el cuadrado ABCD, que se mueve paralelamente á sí mismo y cuyos lados van aumentando según determinada ley, de tal manera que se apoyen constantemente sobre el arco de círculo A'E.'

Como el centro de gravedad se halla necesariamente sobre el eje del sólido, bástanos conocer su distancia á una de las bases.

Tomemos, pues, por origen (fig. 6), el centro A de la base menor y por eje de las x el AP del sólido. Resolveremos la cuestión de una manera general, y después en la fórmula que obtengamos introduciremos la condición de que la curva directriz sea un arco de círculo.

Hagamos una sección mm' á una distancia $Ap = x$ del origen A y llamemos y la ordenada correspondiente á esta abscisa; la área de la sección mm' será, pues, $4\,y^2$; si damos ahora á la abscisa un incremento pq, infinitamente pequeño representado por dx, tendremos que el volumen elemental $mm'n'n$ puede sin error sensible ser considerado como un paralelipípedo rectángulo cuyo volumen está expresado por $4\,y^2\,dx$.

Llamando M el volumen total comprendido desde A hasta P, tendremos:

$$M = \int 4y^2\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots (47).$$

Tomando los momentos con relación al origen A y designando por x_1 la abscisa del centro de gravedad, resulta:

$$M x_1 = \int 4xy^2\,dx \ldots\ldots\ldots (48).$$

De las ecuaciones (47) y (48) se deduce dividiéndolas una por otra:

$$x_1 = \frac{\int xy^2\,dx}{\int y^2\,dx} \ldots\ldots (49).$$

Como el segundo miembro de esta ecuación encierra dos variables, es necesario eliminar una de ellas por medio de la ecuación de la curva directriz, que en el caso que nos ocupa no es otra cosa que el arco de círculo MN, cuya ecuación pasamos á

determinar. Para esto observemos que la ecuación general de un círculo es: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r,^2$ de modo que llamando a la distancia AM y observando que el centro del círculo está situado sobre el eje de las ordenadas, se tiene $q = a + r;\ p = o$, valores que convierten la ecuación anterior en:

$$x^2 + (y - [a + r])^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (50),$$

de donde se deduce

$$y = (a + r) + \sqrt{r^2 - x^2}$$

y en consecuencia

$$y^2 = (a + r)^2 - 2(a + r)\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2$$

Sustituyendo este valor de y^2 en la ecuación (49), tendremos, observando que las integrales deben tomarse entre los límites o y r:

$$x_1 = \frac{\int_o^r ([a+r]^2 x\,dx + r^2 x\,dx - x^3\,dx - 2(a+r)(\sqrt{r^2-x^2})\,x\,dx)}{\int_o^r ([a+r]^2\,dx + r^2\,dx - x^2\,dx - 2(a+r)(\sqrt{r^2-x^2})\,dx)} (51).$$

Integrando por separado el numerador y denominador de esta expresión, tendremos que en cuanto al numerador los tres primeros términos no ofrecerán dificultad alguna, y en cuanto al último podrá ponerse bajo la forma

$$-\int 2(a+r)\sqrt{r^2 - x^2}\,x\,dx = (a+r)\int (r^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \times -2x\,dx$$

Y refiriendo esta integral á la fórmula

$$\int (Fx)^n\, d.Fx = \frac{(Fx)^{n+1}}{n+1};$$