se encontrará

$$-2(a+r)\int\sqrt{r^2-x^2}\,x\,dx=(a+r)\frac{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\tfrac{2}{3}(a+r)(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

En tal virtud, la integral del numerador de la expresión (51) será:

$$\int x\,y^2\,dx=(a+r)^2\frac{x^2}{2}+\frac{r^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}(a+r)(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Sustituyendo por $x_1$ el límite superior $r$, en cuyo caso el último término desaparece, tendremos para integral definida del numerador, hechas las reducciones:

$$\int_0^r xy^2\,dx=\frac{r^2}{4}(2(a+r)^2+r^2)\ldots\ldots(52).$$

Integrando el denominador de la ecuación (51), tendremos:

$$\int y^2\,dx=(a+r)^2x+r^2x-\frac{x^3}{3}-2(a+r)\int dx\sqrt{r^2-x^2}\ldots(53).$$

Esta última expresión la integraremos por las fórmulas que se han establecido en el cálculo integral, para efectuar la integración de las fracciones irracionales, y que tiene por objeto introducir una nueva variable de tal manera, que la expresión propuesta se trasforme en otra en la que ya el radical desaparezca para que pueda ser integrada por los otros métodos conocidos.

Las fórmulas que nos sirven para este objeto, son (Bouchar-lat, cálculo § 319).

$$\sqrt{a+bx-x^2}=\frac{a'-a}{z^2+1}z\ldots\ldots\ldots\ldots(54).$$

$$dx=-\frac{2(a'-a)}{(z^2+1)^2}z\,dz\ldots\ldots\ldots(55).$$

$$(a'-x)=(x-a)z^2\ldots\ldots\ldots\ldots(56).$$



Que son las que sirven para el caso, como el que nos ocupa, en que el cuadrado de la variable que entra bajo el radical, está afectado del signo negativo, y en las cuales $a$ y $a'$ son las raíces de la ecuación que resulte de igualar á $0$ la expresión que está bajo el radical, que en nuestro concepto son $a=-r..a'=r$ y $z$, designa la variable auxiliar cuyo valor en función de $x$, es dado por la ecuación (56).

Se tendrá, pues, aplicando estas fórmulas al caso que examinamos:

$$z^2=\frac{a'-x}{x-a}=\frac{r-x}{x-r};z^2+1=\frac{r-x+x+r}{x+r}=\frac{2r}{x+r}$$

$$\sqrt{r^2-x^2}\frac{(r+r)z}{z^2-1}=\frac{2rz}{z^2+1};dx=\frac{-2(r+r)z\,dz}{(z^2+1)^2}=\frac{-4rz\,dz}{(z^2+1)^2}$$

Y en consecuencia

$$\sqrt{r^2-x^2}.\,dx=\frac{-2rz}{(z^2+1)}\cdot\frac{4rz\,dz}{(z^2+1)^2}=\frac{-8r^2z^2dz}{(z^2+1)^3}\ldots\ldots\ldots\ldots(57).$$

Integrando esta última expresión por partes, poniéndola bajo la forma

$$\frac{-8r^2z^2dz}{(z^2+1)^3}=-4r^2\left(z\times\frac{2z\,dz}{(z^2+1)^3}\right)$$

Comparándola con la fórmula general

$$\int udv=uv-\int vdu$$

tendremos observando que

$$\int\frac{d.Fx}{(F.x)^{n}}=\frac{-1}{(n-1)(Fx)^{n-1}}\ldots u=z..dv=\frac{2z\,dz}{(z^2+1)^3}$$

$$du=dz\ldots v=-\frac{1}{2(z^2+1)^2}$$

En consecuencia

$$-\int \frac{8r^2 z^2\,dz}{(z^2+1)^3} = -4r^2\left(\frac{-z}{2(\ ^2+1)^2}+\int\frac{dz}{2(z^2+1)^2}\right)$$

ó bien

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = -2r^2\left(\frac{-z}{(z^2+1)^2}+\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots (58).$$

Esta última integración deberemos referirla á la de las fracciones racionales que contienen en su denominador factores imaginarios é iguales; y una de las fórmulas que sirven para este objeto establecida por Boucharlat (cálculo § 312), es:

$$\int\frac{dz}{(\beta^2+z^2)^p} = \frac{-z}{2(1-p)\beta^2}(\beta^2+z^2)^{-p+1}$$
$$+\frac{3-2p}{(2-2p)\beta^2}\int(\beta^2+z^2)^{-p+1}dz$$

En la cual haciendo $p=2$ y $\beta^2=1$, resultará

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{-z}{2(1-2)}(1+z^2)^{-2+1}+\frac{(3-4)}{(2-4)}\int(1+z^2)^{-2+1}dz$$

ó bien

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{2(1+z^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z^2}$$

Y observando que

$$\int\frac{dz}{1+z^2} = \text{arc (tang.} = z\text{)},$$

tendremos finalmente:

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{z}{(1+z)^2}+\frac{1}{2}\text{ arc. (tang.} = z\text{)}\ldots\ldots\ldots\ldots (59).$$



En vista de esta última ecuación la (58) se convierte en

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = -2r^2\left(\frac{-z}{(z^2+1)^2}+\frac{1}{2}\frac{z}{(z^2+1)}+\frac{1}{2}\text{arc. (tang.}=z\text{)}\right)$$

Introduciendo el factor 2 dentro del paréntesis

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = -r^2\left(\frac{-2z}{(z^2+1)^2}+\frac{z}{(z^2+1)}+\text{ arc. (tang.} = z\text{)}\right)$$

Poniendo por $z$ y $(z^2+1)$ sus valores anteriormente calculados y sacados de la ecuación (56), tendremos:

$$\int dx\sqrt{r^2-x^2} = -r^2\left(\frac{-2\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{r+x}}}{\frac{4r^2}{(x+r)^2}}+\frac{\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{x+r}}}{\frac{2r}{x+r}}+\text{arc. (tang.}=\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{x+r}}\text{)}\right)$$

$$= -r^2\left(\frac{-2\sqrt{r-x}\sqrt{(x+r)^4}}{4r^2\sqrt{x+r}}+\frac{\sqrt{r-x}\sqrt{(x+r)^2}}{2r\sqrt{x+r}}\right)$$
$$-r^2\text{ arc. (tang.} = \frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{x+r}}\text{)}$$

Y finalmente

$$\int dx\sqrt{r^2-x^2} = -r^2\left(\frac{-\sqrt{r-x}\sqrt{(x+r)^3}}{2r^2}+\frac{\sqrt{r-x}\sqrt{x+r}}{2r}\right)$$
$$-r^2\text{ arc. (tang.} = \frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{x+r}}\text{)}$$

Esta última expresión sustituída á su vez en la ecuación (53) nos da:

$$\int y^2\,dx = (a+r)^2 x + r^2 x - \frac{x^3}{3} +$$

$$2r^2(a+r)\left(\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{2r}-\frac{\sqrt{r-x}\sqrt{(x+r)^3}}{2r^2}+\text{arc. (tang.}=\frac{\sqrt{r-x}}{\sqrt{x+r}}\text{)}\right)$$

Expresión que integrada entre los límites $o$ y $r$ nos da:

$$\int_o^r y^2\,dx = (a+r)^2 r + r^3 - \frac{r^3}{3} + 2\,r^2 (a+r) \text{ arc. (tang.} = o).$$

O bien, reduciendo y observando que arc (tang. = 0) = 0, tendremos finalmente para la integral definida del denominador del valor de $x_1$.

$$\int_o^r y^2\,dx = \frac{r}{3}\left(3\,(a+r)^2 + 2\,r^2\right) \dots\dots\dots\dots (60).$$

En vista de las ecuaciones (52) y (60) el valor de $x_1$ es:

$$x_1 = \frac{3}{4}\,r\,\frac{\left(2\,(a+r)^2 + r^2\right)}{\left(3\,(a+r)^2 + 2\,r^2\right)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (61).$$

Tal es, pues, la expresión que nos da la distancia del centro de gravedad del sólido propuesto, á su base menor.

En vista de lo que antecede, tendremos tomando los momentos de las diferentes partes del ábaco con relación al origen general y sumándolos:

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ ábaco} = \frac{25303219451\,m^4}{1259587584}$$

Sumando los momentos de las diferentes partes del capitel:

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ capitel} = m^4 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{49\times 619\,\pi}{48\times 1536} + \dfrac{1325\times 311\,\pi}{20736\times 24} + \dfrac{311\times 7\,\pi^2}{24\times 4608} \\ + \dfrac{361\times 79\,\pi}{1728\times 6} + \dfrac{107\times 49\,\pi}{8\times 768} \times \dfrac{25303219451}{1259587584} \\ + 0{,}281090784\times 13{,}57047498\,\pi \end{array} \right\}$$

O bien

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ capitel} = 47{,}48271892845724369712\,m^4 \dots\dots\dots (62)$$



Tenemos además:

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ base} = \frac{121\,m^4}{4\times 32} + \frac{(6005\,\pi + 525\,\pi^2)}{10368}\,\frac{17\,m^4}{24} + \frac{9\times 23\,\pi\,m^4}{8\times 256}$$

Y reduciendo quedará:

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ base} = 2{,}9057077938\,m^4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (63).$$

Se tiene igualmente:

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ cuerpo de caña} = m^4 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{9867\times 245\,\pi}{9280\times 1536} - \dfrac{9867\times 9\,\pi^2}{9280\times 1024} \\ + \dfrac{505150555\,\pi}{8252928} + \dfrac{474611\times 1331\,\pi}{766900224} \\ - \dfrac{474611\times 63\,\pi^2}{766900224} \end{array} \right\}$$

Y efectuando las operaciones resulta:

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ cuerpo de columna} = 194{,}9361707829\,m^4 \dots\dots (64).$$

En vista de las ecuaciones (45), (62), (63) y (64), tendremos atendiendo á que

$$\text{Mom}^{\text{to}} \text{ col.} = \text{mom}^{\text{to}} \text{ base} + \text{mom}^{\text{to}} \text{ fuste} + \text{mom}^{\text{to}} \text{ capitel},$$

y designando por $X_g$ la distancia del centro de gravedad de la columna al origen:

$$39{,}0622423768479\,m^3 X_g = m^4 \left\{ \begin{array}{l} 2{,}9057077938 + 194{,}9361707829 \\ + 47{,}48271892845724369712 \end{array} \right\}$$

de donde se deduce $X_g = 6{,}2803\,m \dots\dots\dots\dots\dots (65).$

La ecuación (45) á que hemos llegado anteriormente nos hará conocer el volumen de la columna, toda vez que en dicha fórmula á $m$ se le atribuya el valor que le convenga. Por otra parte, estaremos en aptitud de conocer el peso, sabiendo cuál es la densidad de la substancia de que esté construída, y para facilitar el uso de dicha fórmula en las aplicaciones, exponemos á continuación una tabla de las densidades de las substancias más comunmente empleadas en la formación de las columnas.

| NOMBRES DE LAS SUBSTANCIAS. | DENSIDAD. | Peso del pié cúbico en libras. | Peso del metro cúbico en kilógramos. |
|---|---|---|---|
| | | | Kil. |
| Cantería.............. | 2,29166 | 107,708 | 2291,66 |
| Chiluca................ | 3,677135 | 172,825 | 3677,135 |
| Mármol de Paros...... | 2,837 | 133,339 | 2837.00 |
| Idem ordinario......... | 2,717 | 127,699 | 2717.00 |
| Idem de Cuernavaca... | 3,49056 | 165,030 | 3490,56 |

En todo lo que antecede hemos supuesto que la columna es homogénea; pero como generalmente se forman la base y el capitel de diferente material que el fuste, se podrá por medio de la tabla precedente venir en conocimiento del peso, haciendo uso de las fórmulas que nos dan por separado los volúmenes de las diferentes partes; de modo que al establecer la ecuación de los momentos no se hará entre los volúmenes, pues deberán tomarse en consideración los pesos, en cuyo caso variará necesariamente la posición del centro de gravedad.

Hay precisión en ciertos casos, de construir las columnas en una posición inclinada y veamos cuál será la máxima inclinación que se les puede dar.

Es un principio reconocido, que el equilibrio estable tendrá lugar siempre que la vertical que pasa por el centro de gravedad caiga sobre la base de sustentación.

Supongamos primeramente que la base inferior del zócalo permanezca en un plano horizontal y que el eje de la columna gire al rededor del centro de dicha base; es evidente que el equilibrio será inestable, desde el momento en que la vertical del centro de gravedad pase por el punto $B$. (Fig. 7).



Sea $A\,C$ el eje de la columna, $G$ el centro de gravedad y $B\,D$ la base del zócalo. Al efectuarse el movimiento de giración el punto $G$ se traslada á $G'$ y el $C$ á $C'$.

Esto supuesto, llamando $\partial$ el ángulo formado por la línea $A\,C'$ con la vertical, tendremos que el triángulo rectángulo $A\,B\,G'$, nos da:

$$\operatorname{sen} \partial = \frac{AB}{AG'} = \frac{11}{8 \times 6{,}2803}\text{; de donde } \partial = 12^\circ\, 28'\, 48''$$

Supongamos ahora que gira todo el sistema al rededor de la horizontal del centro de la base del zócalo, permaneciendo éste perpendicular al eje de la columna; en este caso (fig. 8) se tiene:

$$\text{tang. } \triangle = \frac{AB}{AG'} \text{ de donde } \triangle = 12^\circ\, 20'\, 58''$$