demies et les quarts en divisant en quatre parties égales les intervalles compris entre deux cercles horaires consécutifs.

Seconde solution.

On cherchera d'abord, comme dans la solution précédente, la méridienne, l'équinoxiale, et sur celle-ci les points d'intersection avec les différents cercles horaires. Mais ici il n'y aura point de demi-cercle mobile pour trouver l'heure; elle sera donnée immédiatement par les confins de l'ombre sur le globe.

Lorsqu'un globe est en présence du soleil, toujours une de ses moitiés est *illuminée,* et l'autre moitié est dans l'ombre. Ces deux moitiés confinent l'une à l'autre, et se touchent suivant un grand cercle que l'on appelle *cercle d'illumination.* Ce cercle, dont l'axe passe constamment par le centre du soleil, coupe tous les grands cercles en deux parties égales; d'où il suit qu'il y a toujours une moitié de l'équateur qui est éclairée par le soleil, quelle que soit la position de cet astre dans le ciel.

Le cercle d'illumination ne coïncide avec les cercles horaires qu'autant que le soleil est dans les équinoxes; car l'axe de ce cercle étant alors renfermé dans le plan de l'équateur, sa circonférence passe nécessairement par les pôles, et se confond ainsi successivement avec tous les cercles horaires. Mais dans tout autre temps de l'année, l'un des pôles du globe recevant les rayons du soleil, tandis que l'autre en est privé, le cercle d'illumination ne peut plus coïncider avec aucun des cercles horaires, et il s'en écarte d'autant plus, que la *déclinaison* du soleil est plus grande.

Maintenant considérons le soleil au moment où il est dans le méridien. Le cercle d'illumination aura bien alors sur le globe une position différente, selon que le soleil sera

plus haut ou plus bas, mais il coupera toujours l'équateur aux mêmes points d'orient et d'occident; car le méridien où est le soleil est tout à la fois perpendiculaire au cercle d'illumination et à l'équateur. Il est donc aussi perpendiculaire à leur intersection commune, qui est la droite menée par les deux points où le cercle de *six* heures coupe l'équateur du globe. C'est donc à ces deux points-là qu'il faut placer le numéro XII; et il sera en effet midi lorsque le cercle d'illumination atteindra ces points, ou sera renfermé entre eux.

Un raisonnement semblable nous fera voir que lorsque le soleil est dans le cercle horaire d'*une* heure par exemple, les confins de la lumière et de l'ombre doivent arriver sur l'équateur, aux points où il est coupé par le cercle horaire qui est perpendiculaire à celui-là; c'est-à-dire par le cercle horaire de *sept* heures. C'est donc à ces deux points qu'il faut placer le numéro I, et l'on sera assuré qu'il est une heure lorsque l'ombre ou la lumière atteindra l'un de ces points. On placera de même les numéros des heures suivantes sur la circonférence de l'équateur, et le cadran sera construit. Dans cette espèce de cadran solaire, l'heure est continuellement indiquée par les intersections avec l'équateur du cercle horaire, qui est perpendiculaire à celui où se trouve réellement le soleil.

PROBLÈME DIXIÈME.

Tracer les lignes horaires sur une surface cylindrique droite et verticale.

Nous ne considérons ici que le *cylindre géométrique,* c'est-à-dire celui dont la base est une circonférence de cercle. Toute surface cylindrique n'est droite que dans un sens, dans le sens parallèle à l'axe : dans tout autre sens, elle est courbe. Ainsi toute ligne tracée sur une pareille surface est

ligne courbe, à moins qu'elle ne soit menée parallèlement à l'axe du cylindre. Les droites tracées ainsi sur une surface cylindrique s'appellent assez souvent les *génératrices* de cette surface, parce qu'on peut en effet concevoir cette surface comme engendrée par l'une quelconque de ces droites, tournant parallèlement à elle-même autour du cercle qui sert de base au cylindre.

I. Supposons donc qu'on a un cylindre droit, c'est-à-dire dont l'axe est perpendiculaire à la base ; que ce cylindre est posé verticalement au milieu d'un jardin, et qu'on veut y tracer un cadran solaire *méridional* (*Pl. VI*).

SOLUTION.

1. On cherchera d'abord quelle est la génératrice de la surface donnée qui est dans le plan du méridien céleste, ce qui peut se faire de plusieurs manières différentes. Un point de la méridienne étant trouvé, on tracera cette ligne sur la surface du cylindre, au moyen d'un fil à plomb.

2. La méridienne étant tracée, on plantera en un de ses points un faux style, perpendiculairement à la surface donnée, et on le fera servir d'appui au véritable style, qui fera avec celui-là un angle égal à la latitude du lieu, et ira s'enfoncer dans la surface en un autre point de la méridienne, placé au-dessus du premier.

La méridienne est la seule ligne horaire qui puisse être une ligne droite sur notre surface, par la raison que le méridien est le seul cercle horaire qui soit vertical, et dont le plan, par conséquent, passant par l'axe du cylindre, en rencontre la surface suivant deux droites opposées et parallèles. Tous les autres plans horaires coupent le cylindre plus ou moins obliquement, et leurs intersections avec sa surface sont des *ellipses* diversement allongées.

Il y a un point de la surface cylindrique qui appartient à toutes ces courbes, c'est celui où elle est pénétrée par le vrai style : car ce point appartenant à l'axe du monde représenté par ce style, et cet axe étant une droite commune à tous les plans horaires, le point en question est dans tous ces plans, et par suite dans leurs intersections avec la surface donnée. Mais il faut à présent trouver d'autres points de ces intersections, pour pouvoir tracer chacune d'elles avec une suffisante précision. Voici quelle est la méthode qu'on suivra pour cela.

3. On concevra un plan vertical, passant par l'axe du cylindre, et perpendiculaire au méridien. Sur ce plan on tracera un cadran solaire, dont le style soit le prolongement de celui qui est fixé sur la surface cylindrique.

4. Au-dessous du plan vertical on imaginera un plan horizontal, qui est celui de la base du cylindre ; et sur celui-ci on tracera un autre cadran solaire, disposé de manière que son style soit le prolongement du style de l'autre, et que la méridienne et les autres lignes horaires se rencontrent aux mêmes points de la ligne qui sépare les deux plans, ou plutôt qui est leur *section commune*. On aura donc ainsi les traces des plans horaires sur deux plans perpendiculaires l'un à l'autre.

5. Du point où la méridienne du cadran vertical rencontre le plan horizontal, et avec un rayon égal à celui du cylindre, je décris sur ce dernier plan une demi-circonférence, qui me représente la base de la moitié antérieure de ce cylindre. Sur chacun des points de cette demi-circonférence s'élèvent les diverses génératrices de la surface cylindrique, que l'on peut tracer facilement sur le plan vertical.

6. Je divise la demi-circonférence décrite en un nombre

quelconque de parties, par des droites parallèles à la section commune des deux plans, et je considère toutes ces droites comme les traces horizontales d'autant de plans verticaux, parallèles à celui que l'on a mené par l'axe du cylindre. Ces plans couperont la surface cylindrique, chacun suivant deux de ses génératrices, dont la position sera connue par les points où ils rencontrent la circonférence de la base, et qu'on pourra par conséquent tracer sur le plan vertical mené par l'axe.

7. Les intersections de tous ces plans verticaux avec la surface cylindrique étant tracées, on cherchera de la manière suivante les points où elles sont rencontrées par les plans horaires. Je prends pour exemple le plan horaire de *trois* heures.

8. Par tous les points où les plans parallèles coupent la base du demi-cylindre, et seulement du côté de la méridienne où la ligne horaire est placée, on mènera des parallèles à cette ligne de trois heures, prise sur le cadran horizontal. Des points où ces parallèles rencontrent la section commune, on élèvera des verticales terminées par la même ligne horaire prise sur le cadran vertical. Enfin, par ces points de rencontre, on mènera des parallèles à la section commune, qui iront couper quelque part les génératrices correspondantes aux divers points de la base. Ces points d'intersection donneront les hauteurs où le plan horaire de trois heures rencontre ces différentes génératrices.

9. On fera passer par tous les points ainsi trouvés, et par celui qui répond perpendiculairement à l'origine du style, une courbe continue, qui sera, non la ligne horaire de trois heures tracée sur la surface cylindrique, mais la *projection* de cette ligne sur le plan vertical mené par

l'axe. Pour avoir cette dernière ligne telle qu'elle est, il faut développer le cylindre en un point, et voici comment.

10. On prendra une ligne droite égale en longueur à la circonférence du cylindre : on élèvera sur cette droite les perpendiculaires, espacées entre elles comme l'étaient les génératrices de la surface cylindrique dans la construction précédente. Sur celle de ces perpendiculaires qui représente la méridienne du cylindre, on prendra une hauteur égale à celle où est fixé le vrai style ; et sur les perpendiculaires suivantes on marquera les points trouvés tout à l'heure, et dont les hauteurs au-dessus de la base sont maintenant connues. Par les points qui appartiennent à une même heure, et par l'origine du style, on fera passer une courbe, qui sera la véritable ligne horaire développée sur un plan. On fera les mêmes constructions pour toutes les lignes horaires du cadran demandé ; et lorsqu'elles seront toutes ainsi développées sur un même plan, il ne restera plus qu'à appliquer ce plan, que je suppose flexible, sur la surface du cylindre, en ayant soin de faire concourir l'origine commune de toutes les courbes avec le point de la surface où le style doit être implanté. Les lignes horaires prendront alors la courbure et la position qu'elles doivent avoir. On pourra les graver ainsi sur ce cylindre, et le cadran demandé sera construit.

Par la nature de notre cadran, il est aisé de voir que les lignes horaires du matin sont semblables à celles du soir, et que la même construction doit donner les unes et les autres. Ainsi le travail est réduit de moitié par cette observation.

Au cadran méridional que nous venons de construire, on pourrait donner pour supplément un cadran septentrional, construit sur la moitié opposée du cylindre. La

chose, après ce que nous avons fait jusqu'ici, offre peu de difficultés, et nous la laisserons à faire au lecteur.

II. Nous ajouterons ici une méthode pour construire sur une surface cylindrique un cadran *oriental* ou *occidental* (*Pl. VII*).

1° On cherchera d'abord la génératrice de la surface qui regarde exactement le point d'orient ou d'occident; elle est éloignée d'un quart de circonférence de celle qui regarde le midi. Sur cette droite, à une hauteur convenable, on plantera perpendiculairement à la surface un faux style de quelques centimètres de hauteur; et on lui fera porter le véritale style, qui sera fidèlement dirigé vers le pôle. Cela posé :

2° On imaginera encore par l'axe du cylindre un plan vertical : ce sera ici le plan du méridien. On le terminera à une droite horizontale, et ce qui sera au-dessous représentera le plan sur lequel repose le cylindre.

3° Du point où l'axe rencontre l'horizontale, et avec un rayon égal à celui du cylindre, on décrira sur le plan horizontal une demi-circonférence : c'est la base de la moitié la plus avancée du cylindre.

4° Cette demi-circonférence étant divisée en deux également par un rayon perpendiculaire à la section commune, on prolongera ce rayon d'une quantité égale à la hauteur du faux style; et de l'extrémité du prolongement, et avec cette même longueur, on décrira une autre demi-circonférence qui sera tangente à la première, et qui s'appuiera sur un diamètre parallèle à l'horizontale.

5° On divisera cette dernière circonférence en arcs de 15 degrés, et par tous les points de division on mènera des rayons, qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de la section commune du méridien et du plan horizontal.

6° Maintenant on imaginera un certain nombre de plans

verticaux, menés dans l'épaisseur du demi-cylindre, parallèlement au plan du méridien. Les traces de ces plans sur le plan horizontal seront des droites parallèles à la section commune, et leurs intersections avec la surface cylindrique seront des verticales menées par les points où ces traces rencontrent la circonférence de la base.

7° Toutes ces lignes étant tracées, on fera comme si, avec le même style vrai, on voulait construire un cadran solaire sur chacun de ces plans (*voyez* le problème *troisième*); mais on se contentera de marquer pour chaque plan les points où les lignes horaires rencontrent les génératrices qui lui appartiennent.

8° Par le point où le faux style prolongé rencontre le plan du méridien, on mènera sur ce plan une droite perpendiculaire à l'axe du monde : ce sera l'équinoxiale commune de tous ces cadrans; et observant que pour le plan du méridien la hauteur du faux style est augmentée de tout le rayon du cylindre, on prendra les divisions de la droite qui sert de section commune, et on les portera sur l'équinoxiale, à partir toujours du même point.

9° Par tous les points ainsi marqués sur l'équinoxiale, il faudrait faire passer des perpendiculaires, si l'on voulait construire en effet un cadran solaire sur le plan du méridien. Ici l'on se contentera de marquer les points où ces perpendiculaires rencontrent les génératrices *extrêmes*, qui sont les seules qui appartiennent à ce plan.

10° Pour le plan vertical le plus voisin du méridien, la hauteur du faux style est moindre de tout l'intervalle qui sépare ces deux plans, et c'est sur la première parallèle à la section commune qu'on trouve les distances des lignes horaires. On prendra donc ces distances et on les portera encore sur l'équinoxiale, à partir du même point. Des perpendiculaires qu'il faudrait encore élever par tous ces nou-

veaux points de division, on ne marquera que les points où elles rencontrent les deux génératrices qui appartiennent à ce plan. On continuera de la même manière pour tous les plans suivants.

11° On aura donc ainsi un certain nombre de points appartenant à chacune des lignes horaires. On fera passer une courbe continue par tous ceux qui sont relatifs à une même heure, et cette courbe serait la ligne horaire de cette heure, si tous ces points étaient dans un même plan; mais nous savons qu'ils sont dans des plans différents. Notre courbe n'est donc que la *projection verticale* de la véritable ligne horaire. Pour avoir celle-ci telle qu'elle est, il faut encore développer la surface cylindrique en un plan. Sa base sera une ligne droite, sur laquelle on élèvera les génératrices aux distances convenables, et sur celles-ci on marquera les hauteurs déjà trouvées. Par les points appartenant à une même heure, on fera passer une nouvelle courbe, qui sera la véritable ligne de cette heure, tracée sur un plan. On lui fera prendre la courbure convenable, en appliquant le plan sur le cylindre. Il ne restera donc plus alors qu'à faire graver ces lignes sur la surface donnée, et le cadran sera construit.

Telle est la solution du problème proposé dans les deux cas qu'il renferme. J'ajoute celle d'un autre problème, relatif encore à la surface cylindrique, qui fut proposé, il y a peu de temps, dans les *Annales de Mathématiques*.

PROBLÈME ONZIÈME.

Construire un cadran solaire sur une colonne cylindrique, surmontée d'un chapiteau circulaire d'un diamètre plus grand que celui de la colonne, de manière que l'heure soit indiquée par l'ombre de ce chapiteau.

En général, dans les cadrans solaires, l'heure est indiquée

par l'ombre d'un style qui parcourt la surface du cadran, et coïncide successivement avec chacune des lignes horaires. Dans le cas présent, c'est autre chose. D'abord le cadran demandé ne doit point avoir de style, puisqu'on veut que l'ombre du chapiteau y marque les heures; de plus, les lignes horaires, par le même défaut de style, ne peuvent plus y être les intersections des plans horaires avec la surface du cadran : ce sont des lignes qui doivent être tracées par d'autres considérations.

D'un autre côté, l'ombre du chapiteau, à une même heure, tombant sur la colonne, ou plus haut ou plus bas, selon que le soleil à cette heure est plus ou moins élevé au-dessus de l'horizon, il suit que si l'on voulait que l'heure fût marquée par tout le bord de l'ombre, il faudrait tracer sur la colonne une infinité de courbes qui se croiseraient de toutes les manières, d'où naîtrait une confusion extrême, qui rendrait la chose impraticable et inutile. Ce n'est donc pas par le bord continu de l'ombre, mais par quelques points remarquables de cette ombre, que l'heure doit être donnée. Ces points sont ceux où l'ombre du chapiteau se termine sur la colonne.

Bien que l'ombre du chapiteau et sa courbure varient journellement sur la colonne pour une même heure, néanmoins cette ombre peut toujours y être renfermée entre deux lignes parallèles, distantes entre elles horizontalement, dans tous leurs points, d'une quantité égale à la demi-circonférence du cylindre; car il est facile de voir que le soleil, à chaque instant, éclaire toujours une moitié de la colonne. Les deux parallèles étant tracées pour une certaine heure, on sera donc assuré qu'il est cette heure-là, toutes les fois que l'ombre du chapiteau se trouvera comprise entre elles. Nous avons vu quelque chose de semblable pour un certain cadran sphérique. Le problème actuel a donc pour