veaux points de division, on ne marquera que les points où elles rencontrent les deux génératrices qui appartiennent à ce plan. On continuera de la même manière pour tous les plans suivants.

11° On aura donc ainsi un certain nombre de points appartenant à chacune des lignes horaires. On fera passer une courbe continue par tous ceux qui sont relatifs à une même heure, et cette courbe serait la ligne horaire de cette heure, si tous ces points étaient dans un même plan; mais nous savons qu'ils sont dans des plans différents. Notre courbe n'est donc que la *projection verticale* de la véritable ligne horaire. Pour avoir celle-ci telle qu'elle est, il faut encore développer la surface cylindrique en un plan. Sa base sera une ligne droite, sur laquelle on élèvera les génératrices aux distances convenables, et sur celles-ci on marquera les hauteurs déjà trouvées. Par les points appartenant à une même heure, on fera passer une nouvelle courbe, qui sera la véritable ligne de cette heure, tracée sur un plan. On lui fera prendre la courbure convenable, en appliquant le plan sur le cylindre. Il ne restera donc plus alors qu'à faire graver ces lignes sur la surface donnée, et le cadran sera construit.

Telle est la solution du problème proposé dans les deux cas qu'il renferme. J'ajoute celle d'un autre problème, relatif encore à la surface cylindrique, qui fut proposé, il y a peu de temps, dans les *Annales de Mathématiques*.

PROBLÈME ONZIÈME.

Construire un cadran solaire sur une colonne cylindrique, surmontée d'un chapiteau circulaire d'un diamètre plus grand que celui de la colonne, de manière que l'heure soit indiquée par l'ombre de ce chapiteau.

En général, dans les cadrans solaires, l'heure est indiquée

par l'ombre d'un style qui parcourt la surface du cadran, et coïncide successivement avec chacune des lignes horaires. Dans le cas présent, c'est autre chose. D'abord le cadran demandé ne doit point avoir de style, puisqu'on veut que l'ombre du chapiteau y marque les heures; de plus, les lignes horaires, par le même défaut de style, ne peuvent plus y être les intersections des plans horaires avec la surface du cadran : ce sont des lignes qui doivent être tracées par d'autres considérations.

D'un autre côté, l'ombre du chapiteau, à une même heure, tombant sur la colonne, ou plus haut ou plus bas, selon que le soleil à cette heure est plus ou moins élevé au-dessus de l'horizon, il suit que si l'on voulait que l'heure fût marquée par tout le bord de l'ombre, il faudrait tracer sur la colonne une infinité de courbes qui se croiseraient de toutes les manières, d'où naîtrait une confusion extrême, qui rendrait la chose impraticable et inutile. Ce n'est donc pas par le bord continu de l'ombre, mais par quelques points remarquables de cette ombre, que l'heure doit être donnée. Ces points sont ceux où l'ombre du chapiteau se termine sur la colonne.

Bien que l'ombre du chapiteau et sa courbure varient journellement sur la colonne pour une même heure, néanmoins cette ombre peut toujours y être renfermée entre deux lignes parallèles, distantes entre elles horizontalement, dans tous leurs points, d'une quantité égale à la demi-circonférence du cylindre; car il est facile de voir que le soleil, à chaque instant, éclaire toujours une moitié de la colonne. Les deux parallèles étant tracées pour une certaine heure, on sera donc assuré qu'il est cette heure-là, toutes les fois que l'ombre du chapiteau se trouvera comprise entre elles. Nous avons vu quelque chose de semblable pour un certain cadran sphérique. Le problème actuel a donc pour

objet de tracer ces sortes de lignes, pour toutes les heures de la journée, sur une colonne d'un diamètre connu, et pour un chapiteau pareillement donné.

SOLUTION.

La colonne étant dans une position verticale, si l'on conçoit des plans passant par son axe et par le soleil, ces plans rencontreront la surface du cylindre suivant des droites verticales, qui seront celles qui répondent directement au soleil, et passent par le milieu de l'ombre du chapiteau. A l'heure de midi, le soleil étant toujours dans le méridien, et le plan de ce cercle horaire, qui est vertical, passant en cette qualité par l'axe de la colonne, il suit que pendant toute l'année le soleil, à cette heure, répond constamment à la *même* génératrice de la surface cylindrique, et que l'ombre du chapiteau est aussi toujours terminée des deux côtés aux *mêmes* verticales. Ainsi en traçant de haut en bas, sur la colonne, deux lignes droites, éloignées d'un quart de cercle de celle qui répond au soleil quand il est au méridien, on aura les lignes horaires de midi, et il sera midi en effet toutes les fois que l'ombre du chapiteau sera comprise entre ces deux droites.

Pour toute autre heure, le soleil à cette heure sera bien toujours dans le même cercle horaire, mais non pas dans le même vertical : car les cercles horaires, autres que le méridien, ne passant pas par le zénith, ne peuvent se confondre avec aucun des cercles verticaux, et coupent ceux-ci à des hauteurs différentes, selon qu'ils s'écartent plus ou moins du méridien. Il suit de là que, selon que le soleil sera plus haut ou plus bas dans un cercle horaire, il se trouvera en même temps dans un vertical plus éloigné ou plus rapproché du méridien, et par suite il répondra, à la

même heure, à des verticales différentes sur le cylindre. La ligne qui à cette heure divise en deux parties égales l'ombre du chapiteau dans les divers temps de l'année, n'est donc plus une ligne droite, mais bien une ligne courbe, ainsi que celles qui doivent terminer cette ombre des deux côtés, et qui lui sont parallèles. Toute la difficulté du présent problème consiste donc à tracer ces courbes pour chaque heure du jour, ce qui se réduit à trouver les points où elles coupent les diverses génératrices de la surface cylindrique. Or, pour cela, il y a deux constructions à faire : la première pour avoir le *vertical* du soleil, autrement dit son *azimut*, et sa *hauteur* au-dessus de l'horizon, à une heure et à une époque données; et la seconde pour marquer, d'après cela, les *limites* de l'ombre du chapiteau sur le cylindre dans les mêmes circonstances. Exposons d'abord la première construction (*Pl. VIII*).

1. Avec un rayon un peu grand, pour que la figure soit plus distincte et la construction plus juste, je décris une circonférence de cercle, que je divise en deux par un diamètre horizontal. Le demi-cercle supérieur représentera la moitié du méridien, et le demi-cercle inférieur la moitié de l'horizon : le diamètre horizontal est la *section commune* des plans de ces deux cercles. Au-dessus de ce diamètre je mène : 1° un rayon qui fasse avec ce diamètre un angle égal à la latitude du lieu : c'est l'axe du monde; 2° un autre rayon perpendiculaire à celui-là : c'est la trace de l'équateur sur le plan du méridien; 3° à $23\frac{1}{2}$ degrés, à droite et à gauche de l'équateur, deux parallèles à celui-ci, terminées au diamètre horizontal : ce sont les deux tropiques.

2. Maintenant, si le jour donné est le jour du solstice d'été, et que *deux heures* soit aussi l'heure donnée, on trouvera facilement sur le plan du méridien, et sur celui de

l'horizon, les points où répond perpendiculairement le soleil à cette époque et à ce moment, ce que l'on appelle les lieux du soleil rapportés aux plans de ces deux cercles. On prendra donc sur la circonférence de l'horizon, à partir de la section commune, un arc de 30 degrés, et l'on mènera par ce point un rayon au centre. De ce même centre, avec une ouverture de compas égale au rayon du tropique que l'on a dans le demi-cercle supérieur, on décrira sur le plan horizontal une autre demi-circonférence, sur laquelle la droite menée précédemment interceptera aussi un arc de 30 degrés. Or, comme à deux heures le soleil est éloigné du méridien de cette quantité, le *sinus verse* (*) du dernier arc porté sur le tropique, en partant de la circonférence du méridien, donnera le lieu du soleil rapporté au plan de ce dernier cercle; et en abaissant de ce point une verticale jusque sur le plan de l'horizon, et menant dans celui-ci, par l'extrémité de l'arc de 30 degrés, pris sur la circonférence intérieure, une parallèle au diamètre horizontal, le point où ces deux droites se rencontreront sera le lieu du soleil rapporté au plan de l'horizon.

3. Par le lieu horizontal que l'on vient de trouver et par le centre, on fera passer une droite qui sera la trace du plan vertical dans lequel le soleil se trouve en ce moment. L'arc de l'horizon que cette droite interceptera fera connaître l'azimut du soleil, ou l'angle que fait avec le méridien le vertical qui passe par le centre de cet astre. En opérant de même pour toute autre heure et pour tout autre temps de l'année où la déclinaison du soleil est censée connue, on aura facilement la position des verticaux qui passent par le

(*) La perpendiculaire abaissée de l'extrémité d'un arc sur le rayon qui passe par l'autre extrémité, s'appelle le *sinus*; et la partie du rayon comprise entre l'arc et le sinus est le *sinus verse*.

soleil dans ces divers instants, et par conséquent les azimuts de cet astre.

4. Pour avoir les hauteurs du soleil au-dessus de l'horizon à ces mêmes instants, on prendra avec un compas la distance du centre au *lieu horizontal* du soleil, et on la portera sur la section commune, depuis son intersection avec la verticale correspondante jusqu'au delà du centre. De ce dernier point trouvé on mènera une droite au *lieu vertical* du soleil, et l'angle que fera cette droite avec le diamètre horizontal exprimera la hauteur de cet astre au-dessus de l'horizon dans les circonstances supposées. On aura donc facilement, par la construction qu'on vient de faire connaître, pour tous les temps de l'année et pour toutes les heures du jour, les *hauteurs* et les *azimuts* du soleil. Passons à la deuxième construction que nous avons annoncée.

5. L'azimut et la hauteur du soleil étant trouvés l'un et l'autre pour trois époques différentes de l'année, pour les deux solstices et l'équinoxe, je trace sur une autre feuille de papier une droite horizontale, et je considère ce qui est au-dessus de cette droite comme le plan d'élévation de la colonne, et ce qui est au-dessous comme le plan horizontal sur lequel elle repose. La droite menée est donc encore ici la section commune des deux plans. Du point où l'axe de la colonne rencontre cette droite, et avec un rayon égal à celui du cylindre, je décris sur le plan horizontal une demi-circonférence : c'est la base de la moitié de ma colonne. Du même point, je décris une autre demi-circonférence avec le rayon du chapiteau : c'est la *projection horizontale* de celui-ci.

6. Je divise la demi-base en deux parties égales, par un rayon perpendiculaire à la section commune : c'est la trace du méridien sur le plan horizontal. En le prolongeant au-

dessus, on a la trace du méridien sur le plan vertical, laquelle se confond ici avec l'axe du cylindre.

7. Je mène ensuite, toujours sur un plan horizontal, trois rayons faisant, avec la trace méridienne, les angles d'azimut trouvés pour *une heure* après midi par exemple, dans les trois époques choisies. Par les points où ces trois rayons rencontrent la circonférence de la base, si l'on mène des droites perpendiculaires à le section commune, et qu'on les prolonge au-dessus, celles-ci répondront aux génératrices de la surface cylindrique, qui sont à une heure, et dans ces trois saisons, en face du soleil, et qui passent par le milieu de l'ombre du chapiteau sur la colonne. Mais ce n'est pas le point du milieu qu'il nous faut, ce sont les points extrêmes.

8. On prendra donc sur la circonférence de la base trois points éloignés de ceux qu'on avait trouvés, d'un quart de circonférence, et l'on élèvera par là des verticales dans le plan supérieur. Celles-ci répondront aux génératrices, où l'ombre du chapiteau vient se terminer à une heure, aux trois époques dites. Il ne reste plus qu'à trouver quelle est la *hauteur* où arrive le bord de l'ombre sur chacune de ces verticales.

9. A l'extrémité du diamètre horizontal de la base on élèvera une perpendiculaire, qu'on terminera à la rencontre de la circonférence du chapiteau. De ce dernier point on mènera trois droites qui fassent avec cette ligne des angles égaux aux trois hauteurs du soleil qu'on a trouvées par la première construction, pour l'heure et les époques convenues; et ces droites iront couper, sur l'horizontale, des parties qui mesureront l'abaissement au-dessous du chapiteau, du *point* où l'ombre vient alors se terminer. On aura donc sur le plan vertical trois points pour chaque heure, qu'on unira par une courbe; et toutes ces courbes seront les lignes

horaires du cadran demandé, mais rapportées sur le plan vertical qui passe par l'axe de la colonne, et est perpendiculaire au méridien.

La recherche de toutes ces lignes sera considérablement abrégée, en observant que celles du matin sont tout à fait semblables à celles du soir; qu'elles sont aux mêmes distances des lignes de midi, et seulement dans une situation opposée.

10. Lorsque toutes ces lignes horaires auront été tracées, on fera passer une courbe par leurs extrémités inférieures; on unira de même, par une autre courbe, leurs extrémités supérieures, et l'on écrira, le long de l'une et de l'autre, les numéros qui conviennent à chaque ligne. Ces nouvelles courbes sont, sur le plan vertical, la route du point marquant de l'ombre aux deux solstices. On pourrait avoir de même celle qui convient aux équinoxes ou à tout autre temps de l'année.

11. Ce ne sont pas les lignes horaires elles-mêmes qu'on vient de trouver, mais seulement leurs *projections*. Pour les avoir telles qu'elles sont, il reste à développer le cylindre en un plan; à y placer, dans leur ordre et à leurs distances respectives, les différentes génératrices; à marquer sur ces génératrices les points qui ont été trouvés pour chaque heure, et à unir ces points par des courbes. Celles-ci seront les lignes horaires elles-mêmes développées sur une surface plane. On aura soin aussi de lier leurs extrémités supérieures et inférieures par deux courbes.

12. Enfin, en appliquant le plan du développement sur la surface de la colonne, toutes ces lignes prendront la courbure qu'elles doivent avoir; et si elles ont été placées au-dessous du chapiteau à la distance qui convient, et qu'on ait fait coïncider les lignes de XII heures avec les deux verticales qui terminent la partie éclairée de la colonne à

l'heure de midi, on pourra les graver alors sur la surface donnée, et le cadran solaire demandé sera construit; c'est-à-dire que tous les jours de l'année, à mesure que le soleil arrivera à quelqu'un des cercles horaires célestes, l'ombre du chapiteau atteindra quelqu'une de nos lignes horaires, la ligne correspondante, de façon qu'à chaque instant le cadran indiquera l'heure qu'il est au soleil. Le problème proposé est donc résolu.

Comme la vue embrasse toujours à peu près la moitié du cylindre, et que l'heure est indiquée à la fois par les deux extrémités de l'ombre, toujours distantes entre elles d'une demi-circonférence, il est facile de sentir que, dans cette espèce de cadran, on pourra toujours voir l'heure qu'il est, quelque part qu'on soit placé autour de la colonne.

GNOMONIQUE
ANALYTIQUE,

OU

SOLUTION, PAR LA SEULE ANALYSE, DE CE PROBLÈME GÉNÉRAL :

Trouver les intersections des cercles horaires avec une surface donnée.

La Gnomonique a pour objet de tracer les intersections des cercles horaires avec une surface donnée. Divers auteurs ont traité ce sujet plus ou moins complétement : les uns n'ont presque indiqué que les moyens mécaniques; d'autres se sont appuyés de considérations géométriques, et ont enseigné des procédés graphiques; quelques-uns ont emprunté le secours de la Trigonométrie, et ont employé le calcul. Je n'en connais aucun qui n'ait fait usage, pour cela, que de la seule analyse (*). Cependant il m'a paru que ce moyen devait conduire à des résultats plus généraux, dispenser de la considération des triangles, et fournir des formules simples et dont l'application n'a besoin que de la connaissance et de l'usage d'une Table de sinus. J'ai donc cherché, par les méthodes connues de l'analyse, la solution de ce problème général : *Trouver les intersections des cercles horaires avec une surface connue, plane ou courbe.* Mais j'ai cru devoir suivre une marche progressive et graduée, et commencer par les cas les plus simples, pour pas-

(*) On trouve ce même sujet traité analytiquement, mais d'une manière différente, dans la nouvelle édition de l'*Astronomie physique* de M. Biot, laquelle est postérieure à la lecture de ce Mémoire.