l'heure de midi, on pourra les graver alors sur la surface donnée, et le cadran solaire demandé sera construit; c'est-à-dire que tous les jours de l'année, à mesure que le soleil arrivera à quelqu'un des cercles horaires célestes, l'ombre du chapiteau atteindra quelqu'une de nos lignes horaires, la ligne correspondante, de façon qu'à chaque instant le cadran indiquera l'heure qu'il est au soleil. Le problème proposé est donc résolu.

Comme la vue embrasse toujours à peu près la moitié du cylindre, et que l'heure est indiquée à la fois par les deux extrémités de l'ombre, toujours distantes entre elles d'une demi-circonférence, il est facile de sentir que, dans cette espèce de cadran, on pourra toujours voir l'heure qu'il est, quelque part qu'on soit placé autour de la colonne.

GNOMONIQUE
ANALYTIQUE,

OU

SOLUTION, PAR LA SEULE ANALYSE, DE CE PROBLÈME GÉNÉRAL :

Trouver les intersections des cercles horaires avec une surface donnée.

La Gnomonique a pour objet de tracer les intersections des cercles horaires avec une surface donnée. Divers auteurs ont traité ce sujet plus ou moins complétement : les uns n'ont presque indiqué que les moyens mécaniques; d'autres se sont appuyés de considérations géométriques, et ont enseigné des procédés graphiques; quelques-uns ont emprunté le secours de la Trigonométrie, et ont employé le calcul. Je n'en connais aucun qui n'ait fait usage, pour cela, que de la seule analyse (*). Cependant il m'a paru que ce moyen devait conduire à des résultats plus généraux, dispenser de la considération des triangles, et fournir des formules simples et dont l'application n'a besoin que de la connaissance et de l'usage d'une Table de sinus. J'ai donc cherché, par les méthodes connues de l'analyse, la solution de ce problème général : *Trouver les intersections des cercles horaires avec une surface connue, plane ou courbe.* Mais j'ai cru devoir suivre une marche progressive et graduée, et commencer par les cas les plus simples, pour pas-

(*) On trouve ce même sujet traité analytiquement, mais d'une manière différente, dans la nouvelle édition de l'*Astronomie physique* de M. Biot, laquelle est postérieure à la lecture de ce Mémoire.

ser ensuite à ceux qui sont plus compliqués. Outre que cette méthode fatigue moins l'esprit, elle a encore cet avantage, que les solutions particulières obtenues d'abord servent ensuite à vérifier la solution générale du problème dans laquelle elles doivent se trouver renfermées. Mais, avant de présenter ici le tableau des formules qui conviennent aux divers cas que j'ai examinés, je pense qu'il est à propos de faire connaître la marche que j'ai suivie pour les obtenir.

J'ai pris pour les plans rectangulaires coordonnés auxquels doivent se rapporter tous les points de l'espace, les plans de l'*horizon*, du *méridien* et du *premier vertical*. J'ai cherché, dans ce système, l'équation générale des cercles horaires, ou plutôt de leurs plans; et en combinant cette équation : 1° avec celle du plan de l'horizon, j'ai eu la formule qui donne la direction des lignes horaires sur le plan horizontal; 2° avec celle du premier vertical, j'ai eu de même la direction des lignes horaires sur ce dernier; 3° avec celle du méridien, je n'ai trouvé qu'une équation où l'angle horaire n'entre plus, et qui appartient à l'axe du monde, lequel est, comme on sait, la commune intersection de tous les cercles horaires. Il n'y a donc pas d'autre ligne horaire sur le plan du méridien. Mais ces lignes peuvent être tracées sur un plan *parallèle* au plan du méridien; et l'on obtient la formule pour ce cas, en traitant l'équation des cercles horaires avec celle de ce plan parallèle.

L'application des formules trouvées suppose qu'on sait tracer une *ligne méridienne* sur le plan donné. Les méthodes pour tracer une pareille ligne sur un plan horizontal sont assez généralement connues (*). Maintenant si,

(*) Pour la manière de tracer une méridienne horizontale, voyez l'*Étude du Ciel*, pages 65 et 183.

sur cette méridienne horizontale, on prend un point, que l'on considérera comme *le centre de la sphère*, et qu'à ce point on fixe un style exactement dirigé vers le pôle, ce style représentera l'*axe du monde*, autour duquel se fait le mouvement diurne du soleil; et si, de ce même centre, on mène des droites qui fassent avec la méridienne les angles indiqués par la formule, ces droites seront les lignes horaires demandées. Comme ces angles sont donnés par leurs *tangentes*, on tracera ces lignes avec plus de facilité *en élevant une perpendiculaire au bout de la méridienne*, et *prenant sur cette perpendiculaire les valeurs des tangentes pour un rayon égal à la partie de la méridienne comprise entre le centre et la perpendiculaire*. Ce procédé est extrêmement simple et facile à exécuter.

Pour le plan du premier vertical, toute ligne droite menée bien d'aplomb est une méridienne. Le point de cette ligne où l'on plante le style, toujours exactement dirigé vers le pôle, est le centre de la sphère et l'origine commune de toutes les lignes horaires, que l'on pourra encore tracer par le moyen qu'on vient de dire. Enfin, pour le plan parallèle au plan du méridien, il ne pourrait y avoir de méridienne ni de centre : mais le style regardant toujours le pôle, et étant porté par une verge de métal perpendiculaire au plan, les lignes horaires seront toutes *parallèles* entre elles et à la droite menée par le pied de la verge parallèlement au style, c'est-à-dire qu'elles seront toutes dirigées vers le pôle. Cette dernière droite sera la ligne de *six* heures, et les autres lignes horaires en seront distantes verticalement de la quantité donnée par la formule.

Après avoir trouvé les formules qui conviennent à ces trois cas, il est bon de les discuter, et je fais voir qu'elles conviennent à tous les pays de la terre. Seulement, lorsqu'il s'agit des lieux situés sous l'équateur, la première formule ne donne rien; c'est que l'axe du monde est alors

couché sur le plan horizontal, et que les intersections de tous les cercles horaires avec ce plan se réduisent à cette seule ligne. Il faut donc ici chercher les intersections de ces cercles avec un plan parallèle au plan horizontal, et qui en est distant d'une quantité connue. De même sous le pôle, à une latitude de 90 degrés, la seconde formule ne donne rien pour la même raison, et c'est seulement sur un plan parallèle au plan du premier vertical que l'on peut tracer les lignes horaires. Les formules, pour ces deux cas, nous donnent encore des lignes parallèles entre elles, et dirigées, comme le style, vers les pôles du monde. Nous observerons, pour les points qui ont une latitude de 90 degrés, que tout plan vertical peut être considéré comme le premier vertical.

Après avoir ainsi discuté les formules trouvées, je résous le problème par rapport aux plans *verticaux*, autres que le premier vertical. On appelle *déclinaison* l'angle que fait un plan vertical avec ce dernier. Pour prouver cette déclinaison, je fais usage d'une méthode extrêmement simple. Voici en quoi elle consiste : je fixe une petite tringle de fer bien perpendiculairement au plan donné. Au moment du midi vrai (*), je marque sur le plan l'extrémité de son ombre, et par le point marqué je fais passer une verticale; je trace encore par le pied de la tringle une ligne horizontale qui va couper la verticale en un certain point, et je conçois cette portion de l'horizontale comme la base d'un triangle qui a son sommet à l'extrémité antérieure de la tringle. *L'angle formé en cet endroit, et qu'il est facile de calculer, est la déclinaison demandée.*

(*) Ce moment du midi vrai sera donné par une méridienne horizontale. En général, lorsqu'on veut tracer un cadran solaire sur un plan autre que le plan horizontal, il convient d'avoir tout auprès un plan horizontal sur lequel on aura tracé une méridienne, et qui portera un *style* ou *gnomon*, pour indiquer l'heure de midi.

Ayant enseigné à trouver la déclinaison d'un plan vertical quelconque, je prends l'équation générale de ces sortes de plans, et, en la combinant avec celle des cercles horaires, je parviens à des résultats qui conviennent *aux projections* des intersections cherchées. Mais ce sont ces *intersections* elles-mêmes qu'il nous faut pour pouvoir les tracer facilement sur le plan donné : ceci entraîne la nécessité de changer les plans coordonnés, et de faire en sorte que l'un d'eux coïncide avec le plan donné. On arrive aisément à ce but en faisant tourner le plan du premier vertical sur l'axe de l'horizon, jusqu'à ce qu'il ait la même déclinaison que ce plan : le plan de l'horizon demeure immobile; mais le plan du méridien tourne en même temps que le premier vertical. Les plans auxquels tous les points de l'espace sont rapportés étant dans cette nouvelle position, on change convenablement l'équation des cercles horaires; et en la combinant avec celle du plan, on trouve une formule très-simple qui donne toutes les lignes horaires sur ce plan.

On pourrait ici mener encore sur le plan une verticale quelconque qu'on prendrait pour la méridienne, et planter le style sur un point de cette méridienne, qui serait l'origine commune de toutes les lignes horaires : mais il faudrait avoir soin que ce style fût exactement dirigé vers le pôle, ce qui exigerait la détermination d'un autre angle dépendant de la déclinaison du plan. Mais le moyen employé pour trouver cette déclinaison va encore nous servir à poser le style. La verticale déjà menée sera la méridienne, et l'on prendra sur cette ligne, et au-dessus de l'horizontale, un point tel, que sa distance à l'intersection des deux lignes soit la base d'un triangle ayant son sommet à l'extrémité antérieure de la tringle, et faisant là un *angle égal à la latitude du lieu*. A ce point, qui est facile à trouver, on plantera un style droit, qui s'appuiera sur le bout de la tringle, et qui sera,

par ce moyen, posé convenablement pour indiquer, par la coïncidence de son ombre avec les lignes horaires menées du même point, l'arrivée du soleil à chacun des cercles horaires célestes.

La formule à calculer pour le cas que nous venons de traiter est composée de deux parties, l'une constante, et l'autre dépendante de l'angle horaire. L'opération est donc presque aussi simple que pour les cas précédents, et les lignes horaires peuvent encore se tracer par une méthode semblable à celle donnée plus haut.

Le cas dont il est ici question est celui qui se rencontre le plus fréquemment. On trace peu de cadrans solaires horizontaux, parce qu'il faut en être fort près pour y apercevoir les lignes horaires et l'ombre du style. La plupart de ces cadrans sont tracés sur des plans verticaux, parce que ces plans se rencontrent partout, et que l'on peut y apercevoir de loin l'heure indiquée par l'ombre du style. Mais il est peu de ces plans qui soient exactement tournés vers le sud : la plupart déclinent plus ou moins du côté du levant ou du côté du couchant, et, par conséquent, on est fréquemment dans le cas d'employer la dernière formule, dont le calcul n'est guère plus difficile que celui des précédentes, et qui fournit une méthode également simple pour tracer les lignes horaires sur ces sortes de plans.

Au reste, la méridienne du plan étant tracée et le style étant posé comme on a dit, on peut se dispenser de calculer la formule, en faisant usage d'une montre bien réglée, et traçant par son moyen les lignes horaires d'heure en heure, ou de demi-heure en demi-heure.

Comme j'ai considéré les plans qui passent par l'*axe de l'horizon*, je considère de même ceux qui passent par l'*axe du méridien*, qui est la ligne *est-ouest*, et ensuite ceux qui sont menés par l'*axe du premier vertical*, qui est la ligne *nord-sud*. En changeant convenablement deux des plans

coordonnés, et transformant l'équation des cercles horaires, j'arrive à deux formules également simples, qui donnent les lignes horaires au moyen de l'angle qu'elles font avec la méridienne, et de celui que le plan fait avec l'horizon dans le premier cas, et avec le méridien dans le second. Cet angle se trouve aisément au moyen d'une verge perpendiculaire au plan, de l'extrémité de laquelle on laisse tomber un fil à plomb : l'angle formé à ce point est égal à l'inclinaison du plan sur l'horizon, et il est le complément de l'abaissement du plan relativement au méridien, pour tous ceux qui passent par la ligne *nord-sud*.

Pour les plans *inclinés* passant par l'axe du méridien, la ligne méridienne peut se tracer de la même manière que sur un plan horizontal ; et le style doit être planté sur un point de cette méridienne, de manière que son ombre tombe sur cette ligne à l'heure de midi, et qu'il fasse avec elle un angle égal à la latitude *plus* ou *moins* l'inclinaison du plan. Sur les plans *abaissés* passant par l'axe du premier vertical, une ligne horizontale quelconque peut servir de méridienne : un point de cette ligne servira de centre, et le style sera fixé à ce point. On aura soin de le placer dans le plan du méridien, et de lui faire faire avec la ligne méridienne un angle égal à la latitude.

Parmi les plans *inclinés* qu'on vient de considérer, il y en a un qui coïncide avec l'équateur, et par conséquent sur lequel les lignes horaires font toutes entre elles des angles égaux, comme les cercles horaires entre eux. Il en est encore un autre qui passe par les *pôles*, et pour lequel les intersections horaires se réduisent à une seule ligne, qui est l'axe du monde. Mais dans ce cas, il faut placer le style hors du plan, et considérer celui-ci comme étant simplement parallèle à celui qui renferme l'axe de la sphère. On trouve ainsi que toutes les lignes horaires sur ce plan sont des lignes parallèles entre elles, et parallèles à l'axe : leur dis-