FORMULES

POUR TRACER LES LIGNES HORAIRES.

I. SUR UNE SURFACE PLANE.

Sur les plans de l'horizon, du premier vertical, du méridien, et ceux qui leur sont parallèles.

Je prends pour plans rectangulaires coordonnés les plans du méridien, de l'horizon et du premier vertical : le méridien est le plan des xz, le premier vertical celui des yz, et l'horizon est le plan des xy. Pour éviter toute confusion dans les signes, je considérerai les coordonnées comme positives dans l'angle trièdre supérieur, occidental et méridional. D'après cela, l'équation d'un cercle horaire, ou plutôt de son plan, est

$$x \sin L + y \cot AH + z \cos L = 0.$$

L est la latitude, et AH est l'angle horaire, ou l'angle que le cercle horaire fait avec le méridien. On fera tang et cot AH positifs du côté des y négatifs, et négatifs du côté des y positifs; ce qui revient à considérer l'angle horaire comme positif dans la partie orientale, et comme négatif dans la partie occidentale.

1° L'équation du plan de l'horizon étant $z = 0$, l'intersection du cercle horaire avec l'horizon aura pour équation

$$y = -x \sin L \operatorname{tang} AH;$$

c'est la formule pour un cadran solaire horizontal. Cette formule est, comme on voit, l'équation d'une ligne droite

passant par l'origine, et faisant avec la méridienne un angle φ, dont la tangente est $\sin L \operatorname{tang} AH$. Ainsi

$$\operatorname{tang} \varphi = \sin L \operatorname{tang} AH.$$

2° L'équation du premier vertical étant $x = 0$, l'intersection du cercle horaire avec ce plan aura pour équation

$$y = -z \cos L \operatorname{tang} AH,$$

d'où

$$\operatorname{tang} \varphi = \cos L \operatorname{tang} AH;$$

c'est la formule pour un cadran solaire vertical sans déclinaison.

3° L'équation du plan du méridien étant $y = 0$, l'intersection des cercles horaires avec ce plan a pour équation

$$x \sin L + z \cos L = 0;$$

c'est l'équation de l'axe du monde; c'est-à-dire que toutes les lignes horaires se réduisent sur ce plan au seul axe qui est la section commune de tous les cercles horaires.

4° L'équation d'un plan parallèle au méridien étant

$$y = \pm \alpha,$$

l'intersection des cercles horaires avec ce plan aura pour équation

$$x = -z \cot L \pm \frac{\alpha \cot AH}{\sin L};$$

c'est la formule pour les cadrans verticaux parallèles au méridien : α est la distance horizontale du style au plan. Si par le pied de la tringle perpendiculaire au plan qui porte le style on trace sur ce plan une droite parallèle au style, l'équation de cette droite sera $x = -z \cot L$; et si par le même point on mène sur le plan une verticale, ce sera sur cette verticale qu'il faudra prendre la quantité $\frac{\pm \alpha \cot AH}{\sin L}$, et par les points ainsi trouvés on mènera les lignes horaires parallèlement à la première droite.

Si dans la première formule on fait $L = 0$, il vient $y = 0$, équation de l'axe des x. Toutes les lignes horaires se réduisent donc à cet axe, qui est alors l'axe du monde.

5° L'équation d'un plan parallèle à l'horizon étant

$$z = \pm \beta,$$

l'intersection des cercles horaires avec ce plan aura pour équation

$$x \sin L + y \cot AH \pm \beta \cos L = 0;$$

et à cause de $\sin L = 0$, et de $\cos L = 1$, cette équation se réduit à

$$y = \pm \beta \operatorname{tang} AH;$$

c'est la formule pour les cadrans horizontaux à l'équateur.

Si dans la deuxième formule ci-dessus on fait $L = 90°$, il vient $y = 0$, qui est ici l'équation de l'axe des z : c'est que cet axe coïncide alors avec l'axe du monde, et qu'il ne peut y avoir d'autre ligne horaire sur le plan du premier vertical, pour lequel on peut prendre tout plan vertical quelconque passant par cet axe.

6° L'équation d'un plan parallèle au premier vertical étant

$$x = \pm \gamma,$$

l'intersection des cercles horaires avec ce plan aura pour équation

$$\pm \gamma \sin L + y \cot AH + z \cos L = 0;$$

et à cause de $\sin L = 1$, et $\cos L = 0$, cette équation se réduit à

$$y = \mp \gamma \operatorname{tang} AH;$$

c'est la formule pour les cadrans verticaux aux pôles de la terre.

Sur un plan vertical avec déclinaison.

7° En appelant D la déclinaison d'un plan vertical, c'est-

à-dire l'angle qu'il fait avec le premier vertical, en allant d'occident en orient et passant par le sud, l'équation de ce plan sera

$$x \cos D - y \sin D = 0.$$

En combinant cette équation avec celle des cercles horaires, on arriverait à des équations appartenant aux *projections* des intersections de ces plans; mais il faut avoir les intersections elles-mêmes sur le plan donné. Je prends donc ce plan pour celui des $y'x'$; un vertical perpendiculaire à celui-là sera le plan des $x'z'$, et le plan de l'horizon sera celui des $y'z'$. Les formules pour la transformation des coordonnées seront ici

$$x = y' \sin D - x' \cos D \quad \text{et} \quad y = x' \sin D + y' \cos D.$$

L'équation des cercles horaires devient, au moyen de cette transformation,

$$x' (\sin D \cot AH - \cos D \sin L)$$
$$+ y' (\sin D \sin L + \cos D \cot AH) + z' \cos L = 0.$$

L'équation du plan vertical donné étant alors $x' = 0$, l'intersection cherchée a pour son équation

$$y' = - z' \frac{\cos L}{\sin D \sin L + \cos D \cot AH};$$

c'est la formule pour les plans verticaux déclinants, c'est l'équation d'une droite qui fait avec l'axe des z', ou la méridienne verticale, un angle v dont la tangente est exprimée par

$$\frac{\cos L}{\sin D \sin L + \cos D \cot AH};$$

par conséquent,

$$\cot v = \sin D \operatorname{tang} L + \frac{\cos D \cot AH}{\cos L}.$$

Pour avoir la déclinaison D du plan, on plantera une

verge de fer bien perpendiculairement au plan, on marquera sur ce plan l'extrémité de son ombre, au moment où le soleil est arrivé au méridien : on fera passer une verticale par ce point, qui rencontrera quelque part l'horizontale menée par le pied de la verge. Mesurant ensuite exactement cette portion l' de la ligne horizontale, et la longueur l de la verge métallique, on dira

$$l : l' :: 1 : \text{tang}\,D = \frac{l'}{l}.$$

Pour trouver sur la méridienne le point où le style doit être planté, en appelant d la distance de ce point à l'intersection de la méridienne par l'horizontale, et d' la distance de la même intersection à l'extrémité antérieure de la verge, on aura

$$d' : d :: 1 : \text{tang}\,L, \quad \text{d'où} \quad d = d'\,\text{tang}\,L.$$

Le point central trouvé, on y fixera le style, en l'appuyant, comme on a dit, sur le bout de la tringle perpendiculaire au plan; et ce même point sera aussi l'origine de toutes les lignes horaires.

Sur un plan incliné du nord au sud, ou réciproquement.

8° Considérons maintenant des plans passant par l'axe du méridien, et inclinés à l'horizon d'une certaine quantité, comptée en allant du sud au nord et passant par le zénith; l'équation de ces plans sera

$$x \sin I - z \cos I = 0.$$

Cette équation, combinée avec les cercles horaires, ne nous donnerait que les projections des intersections. On aura ces intersections elles-mêmes par une transformation semblable à la précédente. Le plan donné étant pris pour celui des $x'y'$, et les x' de même que les z' étant toujours situés sur le plan du méridien, on a ici pour les formules

de transformation,

$$x = x' \cos I - z' \sin I \quad \text{et} \quad z = x' \sin I + z' \cos I.$$

L'équation des cercles horaires devient, par le moyen de ces valeurs,

$$x' (\cos I \sin L + \sin I \cos L) + y' \cot AH$$
$$+ z' (\cos I \cos L - \sin I \sin L) = 0.$$

L'équation du plan incliné étant $z' = 0$, celle de son intersection avec le cercle horaire devient

$$y' = - x' \sin (L + I)\,\text{tang}\,AH;$$

c'est la formule pour les plans inclinés que nous considérons ici.

Lorsque I est le complément de L, $\sin (L + I) = 1$, et notre équation est alors

$$y' = - x'\,\text{tang}\,AH;$$

formule pour le cadran *équatorial*, le plan incliné coïncidant alors avec le plan de l'équateur.

Lorsque I change de signe, et devient égal à L, il vient $y' = 0$; le plan est alors dirigé vers le pôle, et passe par l'axe du monde. Dans cette position, il n'y a pas sur ce plan d'autre ligne horaire que cet axe; mais si l'on conçoit un plan parallèle à celui-là, et dont l'équation soit $z' = \pm \delta$, l'équation de l'intersection sera

$$y' = \pm \delta\,\text{tang}\,AH;$$

c'est la formule pour les cadrans *polaires*.

Sur un plan incliné de l'est à l'ouest, ou réciproquement.

9° Voyons de même ce qui a lieu pour les plans passant par l'axe du premier vertical, et appelons A l'angle qu'ils font avec le plan du méridien, positif dans la partie occidentale, négatif dans la partie orientale. Pour un angle qui

va du positif au négatif en passant par zéro, le cosinus demeure positif, et le sinus passe du positif au négatif. L'équation générale de ces plans est

$$y \cos A - z \sin A = 0.$$

Il faut encore ici transformer l'équation des cercles horaires. En prenant le plan donné pour celui des $x'z'$, et comptant les y' et les z' sur le plan du premier vertical, les formules de transformation seront

$$y = y' \cos A + z' \sin A \quad \text{et} \quad z = z' \cos A - y' \sin A.$$

L'équation des cercles horaires devient, au moyen de ces valeurs,

$$x' \sin L + y' (\cos A \cot AH - \sin A \cos L) + z' (\sin A \cot AH + \cos A \cos L) = 0,$$

et l'équation du plan étant alors $y' = 0$, celle de l'intersection des cercles horaires avec ce plan sera

$$z' = -x' \frac{\sin L}{\cos A \cos L + \sin A \cot AH};$$

c'est la formule pour les plans *abaissés* que l'on a considérés ici. Cette équation est celle d'une ligne droite menée par l'origine ou le centre, et faisant avec l'axe des x', ou la méridienne horizontale, un angle v dont la tangente est

$$\frac{\sin L}{\cos A \cos L + \sin A \cot AH},$$

par conséquent,

$$\cot v = \cos A \cot L + \frac{\sin A \cot AH}{\sin L}.$$

Pour trouver l'inclinaison I d'un plan sur l'horizon, il faut encore fixer une verge droite perpendiculairement au plan, et de son extrémité laisser tomber un fil à plomb jusqu'à la rencontre du plan. De ce point de rencontre on

mènera au pied de la verge une droite a, que l'on mesurera avec soin; on mesurera de même la longueur l de la verge, et l'on fera

$$l : a :: 1 : \tang I = \frac{a}{l}.$$

On aura de même l'angle A, que font avec le plan du méridien les plans passant par l'axe du premier vertical; mais, dans ce cas, le dernier terme de la proportion est la cotangente de l'angle d'abaissement

$$\cot A = \frac{a}{l}.$$

Sur un plan déclinant et incliné d'une manière quelconque.

10° Soit enfin un plan quelconque passant toujours par l'origine des coordonnées, et faisant avec le premier vertical un angle D', et avec l'horizon un angle I. L'équation de ce plan sera

$$x \cos D' + y \sqrt{\sin^2 D' - \cos^2 I} + z \cos I = 0.$$

En traitant cette équation avec celle des cercles horaires, nous n'aurions que les projections des intersections cherchées. Il faut donc encore ici faire une transformation. Je prends le plan donné pour celui des $x'z'$, par exemple, les axes de ces variables pouvant être situés comme on voudra sur ce plan. Pour plus de simplicité, je choisis pour axe des x' la trace de ce plan sur le plan des xy, et j'appelle φ l'angle que cette trace fait avec l'axe des x. I étant toujours l'inclinaison du plan donné sur le plan de l'horizon, on a pour la transformation des coordonnées les formules connues

$$z = z' \sin I + y' \cos I,$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \sin I \cos \varphi - z' \cos I \cos \varphi$$

et

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin I \sin \varphi + z' \cos I \sin \varphi.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation des cercles horaires, ils seront rapportés aux nouveaux axes; et en faisant $y' = 0$, qui est l'équation de notre plan, on aura leurs intersections avec le plan donné. Ces intersections ont donc pour équation

$$z' = -x' \frac{\cos\varphi \sin L + \sin\varphi \cot AH}{\sin I \cos L + \sin\varphi \cos I \sin L - \cos I \cos\varphi \cot AH};$$

c'est la formule pour un plan quelconque : mais ici l'axe des x' n'est pas la méridienne du plan, ni même en général l'une des lignes horaires qu'on est dans l'usage de tracer sur les cadrans solaires. Mais on obtiendra facilement la direction de cette méridienne, en faisant dans l'équation précédente l'angle horaire égal à zéro : en effet, l'équation se réduit alors à

$$z' = x' \frac{\sin\varphi}{\cos I \cos\varphi};$$

équation qui appartient à la méridienne demandée.

La formule générale qu'on vient de trouver peut se vérifier facilement : en donnant aux angles I et φ des valeurs convenables, on y retrouve toutes les formules obtenues précédemment.

On peut, dans cette formule, à l'angle φ substituer celui qu'on a désigné par D'. On trouve facilement le rapport de ces angles, en cherchant la trace du plan donné sur le plan de l'horizon, et l'on conclut de là que

$$\sin\varphi = \frac{\cos D'}{\sin I} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{\sin^2 D' - \cos^2 I}}{\sin I}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule, elle devient

$$x'\left(\sin L \sqrt{\sin^2 D' - \cos^2 I} + \cos D' \cot AH\right)$$
$$+ z' \left[\begin{array}{l} \sin^2 I \cos L + \cos D' \\ - \cos I \cot AH \sqrt{\sin^2 D' - \cos^2 I} \end{array}\right] = 0.$$

L'angle D' n'est pas la même chose que la déclinaison D; car, après avoir fait tourner un plan sur l'axe des z, ce qui lui donne une certaine déclinaison, si l'on vient à incliner ce plan, l'angle D' qu'il fait alors avec le premier vertical n'est plus le même que celui qu'il faisait auparavant : mais il est facile de voir que ce nouvel angle dépend de la déclinaison D et de l'inclinaison I. On trouve que

$$\cos D' = \cos D \sin I.$$

En substituant dans la formule, on a

$$x'\left(\sin L \sin D + \cos D \cot AH\right)$$
$$+ z'\left(\sin I \cos L + \cos I \sin L \cos D - \cos I \sin D \cot AH\right) = 0.$$

Telle est la formule pour les intersections des cercles horaires avec un plan incliné et déclinant quelconque; mais l'axe des x' est toujours la trace de ce plan sur le plan horizontal. Au reste, on peut encore rapporter les lignes horaires à la méridienne du plan, en se rappelant que cette méridienne a pour équation

$$z' = x' \frac{\sin\varphi}{\cos I \cos\varphi};$$

et faisant usage des valeurs trouvées ci-dessus, pour $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$, lesquelles se réduisent à $\cos D$ et $\sin D$, lorsqu'on substitue D à D', on a ainsi, en prenant la méridienne pour l'axe des x'',

$$x''\left(\cos I \sin L + \cos D \sin I \cos L\right)$$
$$+ z'' \left[\begin{array}{l} \sin I \sin D \left(\cos I \cos L - \sin I \sin L \cos D\right) \\ - \cot AH \left(1 - \sin^2 I \sin^2 D\right) \end{array}\right] = 0.$$

Cette formule donne la direction des lignes horaires relativement à la méridienne du plan, et l'on peut la vérifier comme les précédentes.

II. SUR UNE SURFACE COURBE.

Sur la surface de la sphère.

11° Passons maintenant à la recherche des intersections des cercles horaires avec une surface courbe donnée, et commençons par la surface sphérique. Si le rayon est donné, et que l'origine soit placée au centre de la sphère, l'équation de cette surface est dans ce cas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

En combinant cette équation avec celle des cercles horaires, on trouve des équations qui appartiennent aux projections de ces intersections, projections que l'on reconnaît facilement pour être en général des ellipses. Quant aux intersections elles-mêmes, il est facile de voir qu'elles sont des circonférences de grands cercles, distribués autour de la sphère, de la même manière que les cercles horaires le sont dans le ciel. C'est là tout ce que l'on peut dire au sujet de la surface sphérique située comme on a dit; nous n'examinerons aucune autre position de cette surface, et nous allons passer de suite à la considération de la surface cylindrique.

Sur la surface du cylindre droit géométrique.

12° Le rayon de la surface cylindrique étant r, et l'axe de cette surface passant par l'origine, son équation est, comme on sait,

$$x^2(b^2+1) + y^3(a^2+1)$$
$$+ z^2(a^2+b^2) - 2abxy - 2azx - 2byz = r^2(a^2+b^2+1),$$

ou

$$(bx - ay)^2 + (x - az)^2 + (y - bz)^2 = r^2(a^2+b^2+1).$$

Supposons d'abord que l'axe du cylindre coïncide avec l'axe des z; dans ce cas, $a = 0$ et $b = 0$, et l'équation pré-

cédente devient

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

En combinant cette équation avec celle des cercles horaires, on ne trouve que les projections des intersections, projections qui sont en général des ellipses. On peut déterminer ces mêmes intersections dans leur plan, et l'on trouve encore qu'elles sont généralement des courbes de la même espèce; mais il s'agit de tracer ces courbes sur la surface du cylindre, et il faut pour cela chercher différents points de leur cours.

Si l'on conçoit qu'on ait fait passer au travers du cylindre et par son axe un style dirigé vers les pôles, il est facile de voir que toutes les lignes horaires devront passer par les deux points où le style pénètre dans la surface cylindrique. De plus, si l'on fait passer par l'axe du cylindre une suite de plans verticaux, ayant tous les degrés possibles de déclinaison, tous ces plans couperont la surface cylindrique suivant des droites verticales, parallèles à l'axe des z, et dont les équations seront

$$x = r \sin D, \quad y = r \cos D.$$

La rencontre de ces droites avec les plans des cercles horaires se trouve en substituant ces valeurs dans les équations de ceux-ci, et il vient ainsi

$$r \sin D \sin L + r \cos D \cot AH + z \cos L = 0,$$

d'où l'on tire

$$z = -r \frac{\sin D \sin L + \cos D \cot AH}{\cos L}.$$

On a donc ainsi les trois coordonnées des points de rencontre de l'intersection du plan vertical avec celle du cercle horaire; mais, comme ces points se trouvent sur une surface donnée, et sur des droites dont la position est connue, c'est la valeur seule de z qui doit ici nous intéresser. Cette