valeur doit se compter depuis une section horizontale faite sur la surface cylindrique à la hauteur où le style rencontre l'axe, cette section étant le véritable plan des xy. Les valeurs positives de z se comptent au-dessus, et les valeurs négatives au-dessous. Ayant trouvé, par ce moyen, différents points de la trace du plan horaire sur la surface donnée, on fera passer par tous ces points une courbe, qui sera la ligne horaire demandée, sur laquelle se projettera toujours l'ombre du style, lorsque le soleil sera dans le cercle correspondant. On voit qu'il faudra tracer autant de courbes qu'il y a de cercles horaires dont on voudra avoir la trace sur la surface donnée, et que ces courbes étant décrites, il suffira d'*orienter* le cylindre, c'est-à-dire de le placer de manière que le style soit dans le plan du méridien.

13° Disposons l'axe du cylindre de manière qu'il coïncide avec l'axe du monde. Dans ce cas, $b = 0$ et $a = \cot L$, et l'équation de la surface devient

$$x^2 + y^2(a^2+1) + a^2z^2 - 2azx = r^2(a^2+1),$$

ou

$$(x - az)^2 + y^2(a^2+1) = r^2(a^2+1).$$

En cherchant l'intersection de cette surface par les plans des cercles horaires, on trouve pour résultat, toute réduction faite,

$$y = \pm r \sin AH.$$

Cette équation, qui appartient à la projection de ces intersections sur le plan des yz, nous apprend que ces intersections sont, comme on pouvait le prévoir, des droites parallèles à l'axe du cylindre, et qu'il est facile de tracer sur sa surface.

14° L'axe du cylindre étant toujours dans le plan du méridien, concevons qu'il soit de plus couché dans le plan de l'équateur; l'équation de la surface sera la même que

tout à l'heure, a étant ici égal à $\text{tang}L$: mais les intersections par les plans des cercles horaires seront en général des ellipses. Pour pouvoir les tracer sur la surface donnée, il faudra, comme dans la première position examinée, concevoir une série de plans passant par l'axe du cylindre, et faisant avec le méridien tous les angles possibles, angles que je désigne par D′. Ces plans couperont la surface cylindrique suivant des droites, qui ont pour équations

$$x \cos L = \sin L + r \cos D', \quad y = r \sin D'.$$

En traitant ces équations avec celle des cercles horaires, on aura, pour les points où ceux-ci sont rencontrés par ces droites,

$$z = r(\sin D' \cot AH - \cos D' \sin L),$$
$$x = r(\sin D' \cot AH \sin L + \cos D' \cos L),$$
$$y = r \sin D'.$$

Pour trouver ces points avec plus de facilité, on fera encore passer un style au travers du cylindre, et par son axe; et l'on concevra un plan passant par le style, perpendiculairement à l'axe. Sa section avec la surface cylindrique sera une circonférence de cercle. L'axe du cylindre étant pris pour l'axe des z', la ligne des pôles sera l'axe des x', et l'axe des y' sera le même que celui des y. En employant les formules connues pour cette transformation, les valeurs ci-dessus deviennent

$$z' = r \sin D' \cot AH, \quad x' = r \cos D', \quad y' = r \sin D'.$$

On aurait obtenu les mêmes résultats en faisant, dans les formules précédentes, $L = 0$.

La valeur de z' est ici la seule qui nous intéresse, parce que les points cherchés sont sur une surface donnée, et sur des lignes connues. Les valeurs de z' doivent se compter sur ces lignes, au-dessus et au-dessous, à partir de la sec-

tion circulaire faite dans la surface cylindrique. Il y a encore ici autant de courbes différentes que de cercles horaires. La méridienne seule est une ligne droite, et la ligne horaire de *six* heures est une circonférence de cercle qui se confond avec la section perpendiculaire qui passe par le style.

Sur la surface du cône droit géométrique.

15° Je passe à une autre surface courbe, la surface du cône circulaire. Ici il est visible que le style ne peut guère être placé qu'au sommet du cône, qui est en même temps le centre de la surface conique. Ce point doit donc être l'origine des coordonnées, et alors l'équation de la surface est

$$(z + ax + by)^2 = M^2(a^2 + b^2 + 1)(x^2 + y^2 + z^2);$$

M est le cosinus de l'angle α que la génératrice fait avec l'axe du cône; a et b déterminent la position de cet axe. Plaçons-le d'abord de manière qu'il coïncide avec l'axe des z; dans ce cas l'équation devient

$$z^2 \operatorname{tang}^2\alpha - y^2 - z^2 = 0.$$

Si l'on traite cette équation avec celle des cercles horaires, pour avoir leurs intersections, on trouvera pour résultats des équations de second degré, mais qui n'appartiendront néanmoins qu'à des lignes droites, parce que, en effet, tous les plans coupants passant par le sommet du cône, leurs intersections avec la surface ne peuvent être que des lignes droites. Pour tracer ces lignes avec plus de facilité, ce qui se présente de plus simple, c'est de chercher un seul point de leur cours, celui, par exemple, où elles rencontrent la circonférence de la base du cône. En appelant h la hauteur verticale du cône, le plan de sa base a pour équation, dans le cas présent,

$$z = -h.$$

L'équation de la section de la surface conique par ce plan est donc

$$x^2 + y^2 = h^2 \operatorname{tang}^2\alpha;$$

la trace des plans horaires sur ce même plan est aussi

$$x \sin L + y \cot AH - \cos L = 0.$$

En combinant ensemble ces deux équations, on trouve les coordonnées des points où ces traces se rencontrent, et où doivent aboutir les lignes horaires; on a d'abord

$$y^2(\cot^2 AH + \sin^2 L) - 2hy \cot AH \cos L = h^2(\operatorname{tang}^2\alpha \sin^2 L \cos^2 L),$$

et ensuite

$$y = h\left[\frac{\cot AH \cos L \pm \sin L \sqrt{\operatorname{tang}^2\alpha(\cot^2 AH + \sin^2 L) - \cos^2 L}}{\cot^2 AH + \sin^2 L}\right],$$

puis

$$x = h\left[\frac{-\sin L \cos L \pm \cot AH \sqrt{\operatorname{tang}^2\alpha(\cot^2 AH + \sin^2 L) - \cos^2 L}}{\cot^2 AH + \sin^2 L}\right].$$

y et x sont les coordonnées des points de la base par où doivent passer les lignes horaires; et comme elles doivent, d'ailleurs, passer aussi par le sommet, on a donc tout ce qu'il faut pour les tracer. Mais on n'aura pas même besoin de calculer ces formules, si l'on a soin de mener sur le plan donné la trace du plan horaire. Le point où cette trace rencontrera la circonférence de la base du cône sera le point cherché.

16° Plaçons l'axe du cône dans le plan de l'équateur, sans le faire sortir du plan du méridien; changeons en même temps les axes des coordonnées. Soit l'axe du cône celui des z', l'axe du monde celui des x', et l'intersection du cercle horaire de *six* heures avec l'équateur, l'axe des y'; les choses seront alors dans les mêmes circonstances que tout à l'heure. L'équation de la surface sera encore

$$z'^2 \operatorname{tang}^2\alpha - y'^2 - x'^2 = 0;$$

celle de sa base parallèle au plan des $x'y'$ sera aussi

$$y'^2 + x'^2 = h^2 \operatorname{tang}^2\alpha ;$$

l'équation des cercles horaires rapportés aux nouveaux plans est

$$y' = z' \operatorname{tang} AH,$$

et leur trace sur le plan de la base a pour équation

$$y' = -h \operatorname{tang} AH ;$$

leurs rencontres avec la circonférence de la base ont pour équations

$$y' = -h \operatorname{tang} AH, \quad x' = \pm h\sqrt{\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2 AH}.$$

Au moyen de ces valeurs, il sera facile de tracer les lignes horaires sur la surface conique donnée.

Si, l'axe du cône étant toujours dans la même situation, on supposait que le cône reposât sur un plan horizontal, alors reprenant l'équation première de la surface conique, et observant que $b = 0$ et $a = \operatorname{tang} L$, on aurait, pour l'équation de cette surface,

$$x^2(\sin^2 L - \cos^2\alpha) - y^2\cos^2\alpha + z^2(\cos^2 L - \cos^2\alpha) + 2zx\sin L\cos L = 0 ;$$

sa trace sur un plan horizontal, dont l'équation est $z = -h'$, a pour équation

$$x^2(\sin^2 L - \cos^2\alpha) - y^2\cos^2\alpha - 2h'x\sin L\cos L = h'^2(\cos^2\alpha - \cos^2 L) ;$$

la trace des cercles horaires sur ce même plan étant toujours représentée par l'équation

$$x\sin L + y\cot AH - h'\cos L = 0,$$

ces deux équations combinées donneront d'abord

$$x^2[\cot^2 AH(\sin^2 L - \cos^2\alpha) - \sin^2 L\cos^2\alpha] - 2h'x\sin L\cos L(\cot^2 AH - \cos^2\alpha) = h'^2[\cot^2 AH(\cos^2\alpha - \cos^2 L) + \cos^2 L\cos^2\alpha],$$

d'où l'on tirera ensuite, par les règles ordinaires,

$$x = h'\left[\frac{\sin L\cos L(\cot^2 AH - \cos^2\alpha) \pm \cot AH\cos\alpha\sqrt{\cot^2 AH\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}{\cot^2 AH(\sin^2 L - \cos^2\alpha) - \sin^2 L\cos^2\alpha}\right];$$

$$y = h'\left[\frac{\cos L\cot AH\cos^2\alpha \pm \sin L\cos\alpha\sqrt{\cot^2 AH\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}}{\cot^2 AH(\sin^2 L - \cos^2\alpha) - \sin^2 L\cos^2\alpha}\right];$$

ce sont là les coordonnées des points où doivent arriver les lignes horaires; mais, comme on a dit, on peut se dispenser de les calculer, si l'on trace sur le plan horizontal, qui sert de base au cône, les intersections des cercles horaires avec ce plan.

17° Enfin, la surface conique pourrait être située de manière que son axe coïncidât avec l'axe du monde. Alors, en employant une transformation semblable à celle que l'on a faite pour le cas précédent, l'axe du cône étant l'axe des z' et le plan de l'équateur étant le plan des $x'y'$, on trouverait, pour les points de rencontre des lignes horaires avec la base du cône,

$$x' = \pm h\operatorname{tang}\alpha\cos AH \quad \text{et} \quad y' = \pm h\operatorname{tang}\alpha\sin AH.$$

Si, le cône étant toujours dans la même position, sa surface se prolongeait jusqu'à un certain point horizontal ayant pour équation $z = -\cot h'$; alors, en observant que $b = 0$ et que $a = -\cot L$, l'équation de la surface conique devient

$$x^2(\cos^2 L - \cos^2\alpha) - y^2\cos^2\alpha + z^2(\sin^2 L - \cos^2\alpha) - 2zx\sin L\cos L = 0.$$

Celle de sa trace sur le plan horizontal est alors

$$x^2(\cos^2 L - \cos^2\alpha) - y^2\cos^2\alpha + 2h'x\sin L\cos L = h'^2(\cos^2\alpha - \sin^2 L) ;$$

cette équation, combinée avec la trace des cercles horaires

sur le même plan horizontal, donne d'abord

$$x^2[\cot^2 AH(\cos^2 L - \cos^2\alpha) - \sin^2 L\cos^2\alpha] - 2h'x\sin L\cos L(\cot^2 AH + \cos^2\alpha) = h'^2[\cot^2 AH(\cos^2\alpha - \sin^2 L) + \cos^2 L\cos^2\alpha];$$

de celle-ci on tire par les procédés ordinaires

$$x = h'\left[\frac{\sin L\cos L(\cot^2 AH + \cos^2\alpha) \pm \cot AH\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\cot^2 AH + 1}}{\cot^2 AH(\cos^2 L - \cos^2\alpha) - \sin^2 L\cos^2\alpha}\right],$$

$$y = h'\left[\frac{\cot AH\cos L\sin^2\alpha \pm \sin L\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\cot^2 AH + 1}}{\cot^2 AH(\cos^2 L - \cos^2\alpha) - \sin^2 L\cos^2\alpha}\right].$$

Nous ferons sur ces valeurs les mêmes observations que sur les précédentes, c'est-à-dire qu'on peut aisément, sans les calculer, trouver sur la base horizontale du cône les points où doivent arriver les lignes horaires.

Sur les surfaces de l'ellipsoïde, de l'hyperboloïde et du paraboloïde de révolution.

18° Cherchons encore les intersections des cercles horaires avec l'ellipsoïde de révolution, et supposons que l'axe de la surface coïncide avec l'axe des z, et que son centre soit placé à l'origine des coordonnées. L'équation de la surface est

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - z^2);$$

sa section par un plan horizontal dont l'équation est $z = -h$ sera

$$x^2 + y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}h^2.$$

Cette équation, combinée avec la trace des cercles horaires sur le même plan, donne pour les coordonnées des points

de rencontre,

$$y = \frac{h\cot AH\cos L \pm \sin L\sqrt{\left(b^2 - \frac{b^2h^2}{a^2}\right)(\cot^2 AH + \sin^2 L) - h^2\cos^2 L}}{\cot^2 AH + \sin^2 L},$$

et

$$x = \frac{-h\cos L\sin L \pm \cot AH\sqrt{\left(b^2 - \frac{b^2h^2}{a^2}\right)(\cot^2 AH + \sin^2 L) - h^2\cos^2 L}}{\cot^2 AH + \sin^2 L}.$$

19° Pour l'hyperboloïde de révolution autour d'un axe vertical, l'origine étant au centre, on a d'abord l'équation de la surface

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2z^2}{a^2} b^2;$$

la trace de cette surface sur le plan horizontal $z = -h$ est aussi

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2h^2}{a^2} - b^2,$$

et cette équation, traitée avec celle que donne la trace des cercles horaires sur le même plan, conduit aux résultats suivants :

$$y = \frac{h\cos L\cot AH \pm \sin L\sqrt{\left(\frac{b^2h^2}{a^2} - b^2\right)(\cot^2 AH + \sin^2 L) - h^2\cos^2 L}}{\cot^2 AH + \sin^2 L},$$

et

$$x = \frac{-h\sin L\cos L \pm \cot H\sqrt{\left(\frac{b^2h^2}{a^2} - b^2\right)(\cot^2 AH + \sin^2 L) - h^2\cos^2 L}}{\cot^2 AH + \sin^2 L}.$$

20° Enfin, pour le paraboloïde de révolution autour d'un axe vertical, l'origine étant au sommet, on a d'abord pour équation de sa surface

$$x^2 + y^2 + pz = 0;$$

sa trace sur le plan horizontal $z = -h$ a pour équation

$$x^2 + y^2 - ph = 0,$$

et cette équation, combinée avec la trace des cercles horaires sur le même plan, donne pour résultats les valeurs suivantes :

$$y = \frac{h \cot \mathrm{AH} \cos \mathrm{L} \pm \sin \mathrm{L} \sqrt{ph(\cot^2 \mathrm{AH} + \sin^2 \mathrm{L}) - h^2 \cos^2 \mathrm{L}}}{\cot^2 \mathrm{AH} + \sin^2 \mathrm{L}},$$

et

$$x = \frac{-h \sin \mathrm{L} \cos \mathrm{L} \pm \cot \mathrm{AH} \sqrt{ph(\cot^2 \mathrm{AH} + \sin^2 \mathrm{L}) - h^2 \cos^2 \mathrm{L}}}{\cot^2 \mathrm{AH} + \sin^2 \mathrm{L}}.$$

APPENDICE.

1° On peut désirer de marquer sur la méridienne le moment de l'entrée du soleil dans chaque signe de l'écliptique; c'est alors l'extrémité du style, ou le rayon solaire passant par le trou de la plaque que porte le style, qui sert d'indicateur. En appelant h la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan, et x la distance du pied de la perpendiculaire au point cherché, on a pour le point horizontal, en désignant par D la *déclinaison* du soleil,

$$x = h \tan (\mathrm{L} \mp \mathrm{D}),$$

et pour le plan du premier vertical,

$$x = h \cot (\mathrm{L} \mp \mathrm{D}),$$

et pour un plan vertical quelconque dont la déclinaison est D′, on a

$$x = \frac{h \cot (\mathrm{L} \mp \mathrm{D})}{\cos \mathrm{D}'};$$

x est ici la partie de la méridienne comptée depuis l'horizontale menée par le pied de la perpendiculaire.

Le signe supérieur est pour la déclinaison boréale, et le signe inférieur pour la déclinaison australe. Quant à la déclinaison du soleil à son entrée dans chaque signe, on la trouvera par la formule

$$\sin \mathrm{D} = \sin \mathit{long}. \sin \mathit{obliq}.$$

Elle est d'ailleurs jour par jour dans les Tables du mouvement du soleil.

2° Si l'on voulait tracer sur le plan donné la route du rayon solaire pendant que le soleil est sur l'horizon, il faudrait regarder l'extrémité du style comme l'origine des