CORRECTIONS ESSENTIELLES

Page 10, ligne 13, *au lieu de :* F'_0, *écrire :* F_1.
— 37, ligne 3, *au lieu de :* F_1, *écrire :* F'_0.
— 88, ligne 16, *au lieu de :* à la fin.... *écrire :* page 43.
— 107, ligne 30, *ajoutez* (Voir page 355).
— 109, ligne 27, *au lieu de :* Chap. III, *écrire :* page 117.
— 132, ligne 16, *au lieu de :* intérieures, *écrire :* extérieures.
— 146, lignes 2 et 8, *au lieu de :* T', *écrire :* T'''.
— 152, ligne 2, *après :* carènes, *écrire :* en divisant par les volumes et on obtient *h*.
— 159, lignes 13 et 15, *au lieu de :* En Angleterre... d'ordinaire, *écrire :* Lorsque l'on ne veut calculer, *et au lieu de :* emploie alors, *écrire :* peut employer.
— 159, ligne 17, *ajoutez :* Les principes de cette méthode sont exposés dans l'ouvrage de Thearle.
— 162, ligne 26, *au lieu de :* $t\Delta V$, *écrire :* ΔV.
— 172, ligne 23, *au lieu de :* 50 à 60, *écrire :* environ 80 kilogr., les unités sont le mètre et la seconde.
— 184, ligne 6, *au lieu de :* trois déplacements, *écrire :* les trois composantes d'un déplacement infiniment petit.
— 189, ligne 18, *après :* forces, *écrire :* extérieures.
— 190, lignes 15, 16 et 17, *remplacer par :* Les résistances F et F' correspondant aux vitesses *v* et *v'* étant en effet indépendantes des circonstances antérieures, elles seront les mêmes que si l'on avait amené les deux systèmes à ces vitesses par des mouvements semblables.
— 204, lignes 15 et 16, *permuter les mots :* tribord et bâbord.
— 206, lignes 10 et 12, *supprimer :* X *au dénominateur, et rétablir le signe :* = *après* M.
— 208, ligne 3, *au lieu de :* V^2, *écrire :* V^3.
— 238, ligne 11, *au lieu de :* tribord, *écrire :* bâbord.
— 256, Les six indications finales de la colonne 10 correspondent aux six évolutions du *Duquesne* et de l'*Annamite* dans l'ordre du tableau.
— 309, ligne 25, *au lieu de :* π^5, *écrire :* π^2.
— 314, lignes 20 et 21, *supprimer depuis :* AO = AC *jusqu'à* C.
— 329, ligne 7, *au lieu de :* quartier de Davis, *écrire :* anneau astronomique.

LIVRE PREMIER

ÉQUILIBRE ET STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS

CHAPITRE Ier

ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS

§ 1. — Conditions nécessaires à l'équilibre. Définitions. — Surfaces des flottaisons isocarènes et des centres de carène.

Conditions nécessaires à l'équilibre d'un corps flottant. — Lorsqu'un solide pesant est plongé dans un liquide en repos, il est soumis, d'une part, aux actions de la pesanteur sur ses diverses parties, et d'autre part, aux pressions que le liquide exerce sur les parois mouillées.

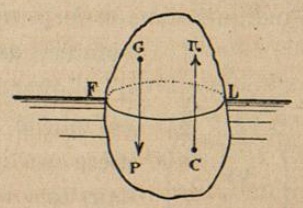

Fig. 1.

Les premières forces ont pour résultante le *Poids du corps,* dirigé de haut en bas et passant par le centre de gravité G (fig. 1); les pressions du liquide ont également une résultante, la *Poussée,* dirigée de bas en haut, égale au poids du liquide déplacé et passant par le centre[1] C du volume immergé (Principe d'Archimède).

1. Nous aurons fréquemment à considérer simultanément des centres de gravité de corps et des centres de gravité de surfaces et de volumes; pour éviter les confusions nous appellerons ces derniers des centres de surface ou des centres de volume.

Pour que ces deux forces se fassent équilibre il est nécessaire et suffisant qu'elles soient égales et directement opposées, il faut et il suffit par conséquent :

1° Que le poids du liquide déplacé soit égal au poids du corps ;

2° Que les deux points G et C soient situés sur une même verticale, c'est-à-dire sur une droite perpendiculaire au plan FL ; si cette dernière condition n'était pas réalisée, les deux forces formeraient un couple et le corps ne pourrait pas rester en repos.

Définitions. — *Flotteur.* — Nous appellerons *Flotteur* un solide pesant fermé de toutes parts et dont le poids total est inférieur au poids d'un volume d'eau égal au sien. Il peut arriver dans la pratique que les flotteurs soient des solides creux ouverts à leur partie supérieure, c'est le cas des navires, mais lorsque l'on convient de n'envisager que les inclinaisons telles que le liquide ne peut pas embarquer, rien n'empêche évidemment de les supposer complètement clos.

Axes d'orientation. — Pour préciser la manière dont un corps solide est orienté dans l'espace, il suffit évidemment d'indiquer dans le corps une ligne qui, dans la position considérée, est verticale et dirigée en bas, et d'indiquer en outre la manière dont le corps est tourné autour de cette ligne ; cette dernière particularité n'offrant aucun intérêt dans tous les problèmes que nous aurons à étudier, nous n'aurons à nous occuper que de la première. Nous imaginerons que par un point O (fig. 2) quelconque du flotteur on a mené dans toutes les directions des demi-droites, telles que OA, OB, OD... ; nous appellerons ces lignes des *Axes d'orientation*, et nous dirons que le *flotteur sera orienté suivant l'un d'eux*, OA par exemple, quand cet axe OA sera vertical et *dirigé en bas*.

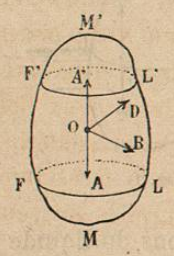

Fig. 2.

Flottaisons, carènes. — On appelle *flottaison* un plan FL qui

détache dans le flotteur un volume tel que le poids d'un volume égal de liquide soit égal au poids du flotteur ; si l'on appelle δ le poids spécifique du liquide, P le poids du flotteur, V le volume détaché par la flottaison, on devra avoir :

$$V\delta = P \qquad \text{ou} \qquad V = \frac{P}{\delta}.$$

Lorsque l'on considère des flotteurs à poids variable, on peut avoir à envisager des flottaisons correspondantes à des volumes différents.

Le volume détaché par la flottaison est appelé *carène*, des carènes équivalentes sont dites *isocarènes*, et les flottaisons qui détachent des isocarènes dans un même flotteur sont des *flottaisons isocarènes*.

Le centre de volume d'une carène se nomme le *centre de carène*.

Surface des flottaisons isocarènes ou Surface F. — Imaginons qu'après avoir orienté le flotteur suivant un axe quelconque OA, on le fasse descendre progressivement dans le liquide en repos ; ce corps passera évidemment par une position intermédiaire dans laquelle le poids du liquide déplacé sera égal à son poids, et cette position sera unique pour la même orientation ; par conséquent à chaque axe d'orientation correspond une flottaison et une seule ; à deux axes directement opposés OA et OA′ correspondront deux flottaisons parallèles, mais ces deux flottaisons se présenteront réciproquement leurs faces supérieures ou leurs faces inférieures suivant le cas, elles seront donc tournées en sens inverse.

Supposons que l'on considère les flottaisons isocarènes correspondantes à quatre axes d'orientation obliques l'un sur l'autre et quelconques ; ces flottaisons formeront, en se coupant entre elles, un tétraèdre tel que si l'on fait reposer une de ses faces sur la surface libre du liquide le volume immergé sera une isocarène ; si l'on considère un nombre de

plus en plus grand d'axes d'orientation, on obtiendra des polyèdres dont les faces augmenteront en nombre et diminueront d'étendue, et, à la limite, la figure se transformera en une surface courbe continue dont les plans tangents jouiront de la même propriété que les faces des polyèdres, et seront ainsi des flottaisons isocarènes; c'est à cette surface limite qu'on donne le nom de *Surface des flottaisons isocarènes* ou par abréviation de *Surface F*. On définit la propriété que nous venons de peindre en disant que la *Surface F est l'enveloppe des flottaisons isocarènes*.

La Surface F affecte en général des formes très compliquées, même pour les flotteurs de formes géométriques simples ; mais elle jouit, comme les surfaces qui sont convexes en tous leurs points, de la propriété de posséder deux plans tangents perpendiculaires à une même direction et deux seulement ; et, si l'on fait rouler cette surface sur la surface libre du liquide de manière à amener successivement en contact avec elle deux plans tangents parallèles, le flotteur prendra les orientations correspondantes à deux axes directement opposés.

Surface des centres de carènes ou surface C. — A chaque flottaison isocarène correspond un centre de carène, et le lieu géométrique des centres des isocarènes est une surface que l'on nomme *Surface des centres de carène* ou par abréviation *Surface C*.

Réduction du problème de l'équilibre à la géométrie pure. — La première des conditions d'équilibre énoncées plus haut sera réalisée dans toutes les positions obtenues en faisant rouler la surface F sur la surface libre du liquide ; pour que la deuxième le soit également, il faudra en outre que la perpendiculaire abaissée du centre de carène sur la flottaison correspondante passe par le centre de gravité.

La recherche des positions d'équilibre des flotteurs est ainsi ramenée à la géométrie pure ; elle fera l'objet du § suivant.

§ 2. — Géométrie des flotteurs (1re approximation).

Théorème I. — *La surface F touche les flottaisons isocarènes en leurs centres respectifs.*

Soient F_0L_0 (fig. 3) une flottaison, F_1L_1 une flottaison quelconque isocarène avec la précédente et faisant avec elle un angle θ. Si l'on rabat F_1L_1 sur F_0L_0 en conservant à la carène le même volume, ce plan roulera sur la surface F, et l'intersection AB viendra, à la limite, passer par le point K_0 où cette surface touche F_0L_0 ; pour établir le théorème, il suffit de démontrer que les droites telles que AB passent toutes à la limite par le centre de la flottaison, c'est-à-dire que les moments des deux parties de l'aire F_0L_0, relativement à cette ligne, deviennent égaux à la limite.

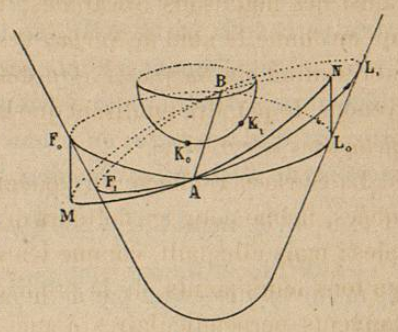

Fig. 3.

Élevons à cet effet sur le contour de F_0L_0 un cylindre droit, soit ANBM l'intersection de ce cylindre avec F_1L_1 ; désignons respectivement par α et β les volumes des couronnes $ANBL_0L_1$ et $AMBF_0F_1$; les deux flottaisons étant isocarènes, les onglets F_0F_1 et L_0L_1 sont équivalents, et le rapport de leurs volumes est égal à l'unité ; on aura donc en mettant en évidence les volumes des onglets de cylindre :

$$\frac{\text{Vol. onglet } L_0N + \alpha}{\text{Vol. onglet } F_0M - \beta} = 1.$$

Cette égalité est vraie quelle que soit l'inclinaison θ ; elle est donc vraie à la limite quand $\theta = o$, mais, d'après un théorème connu, les couronnes α et β étant infiniment petites relativement aux volumes des onglets, on peut les supprimer

au numérateur et au dénominateur en passant à la limite et l'on a :

$$\frac{\text{Lim. Vol. onglet } L_0N}{\text{Lim. Vol. onglet } F_0M} = 1.$$

Désignons actuellement par ω l'aire d'un élément infiniment petit de la partie ABL_0 de la flottaison, et par y la distance de cet élément à l'intersection AB ; élevons sur cet élément un cylindre droit ; le volume de ce cylindre élémentaire est égal à $\omega y \operatorname{tg}\theta$; on a donc, en représentant par m le moment de ABL_0 relativement à AB :

$$\text{Vol. onglet } L_0N = \Sigma\omega y \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta\,\Sigma\omega y = m \operatorname{tg}\theta,$$

de même en désignant par m' le moment de ABF_0, on aura :

$$\text{Vol. onglet } F_0M = m' \operatorname{tg}\theta.$$

On aura donc :

$$\text{Lim.}\frac{m \operatorname{tg}\theta}{m' \operatorname{tg}\theta} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \text{Lim. } m = \text{Lim. } m'.$$

Lemme I. — *Soit G* (fig. 4) *le centre de gravité d'un système de corps, et P le poids total ; soient également g_1, g_2, g_3... les centres de gravité des parties du système et p_1, p_2, p_3... leurs poids. Si l'on déplace l'un quelconque de ces poids, p_1 par exemple, de manière que son centre de gravité vienne en g_1', le centre de gravité G se déplacera dans une direction GG′ parallèle à g_1g_1' et l'on aura :*

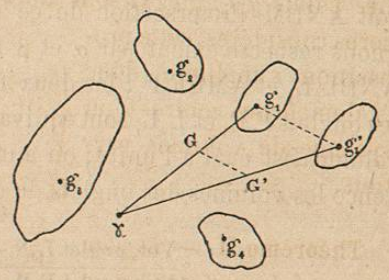

Fig. 4.

$$P \times GG' = p_1 \times g_1g'_1.$$

Soit en effet γ le centre de gravité du système obtenu en

faisant abstraction du poids p_1 ; il est clair que les points G et G′ sont respectivement situés sur les lignes γg_1 et $\gamma g_1'$ et que l'on a :

$$p_1 \times g_1G = (P - p_1) \times \gamma G$$
$$p_1 \times g_1G' = (P - p_1) \times \gamma G'$$

d'où l'on déduit :

$$p_1 \times \gamma g_1 = P \times \gamma G \quad \text{et} \quad p_1 \times \gamma g_1' = P \times \gamma G'$$

et par conséquent

$$\frac{\gamma g_1}{\gamma G} = \frac{\gamma g_1'}{\gamma G'} = \frac{P}{p_1};$$

les deux lignes GG′ et g_1g_1' sont donc parallèles et l'on a :

$$\frac{g_1g_1'}{GG'} = \frac{P}{p_1} \qquad \text{ou} \qquad p_1 \times g_1g_1' = P \times GG'.$$

Lorsque les corps considérés sont homogènes et de même densité δ, on a $P = V\delta$, $p_1 = v_1\delta$, et la dernière égalité devient

$$v_1 \times g_1g_1' = V \times GG'.$$

Les points g_1g_2... et G sont alors les centres de volume des corps considérés, cette proposition s'applique donc également aux centres d'un système de volumes partiels.

Théorème II. — *Le plan tangent à la surface C en un point quelconque est parallèle à la flottaison correspondante.*

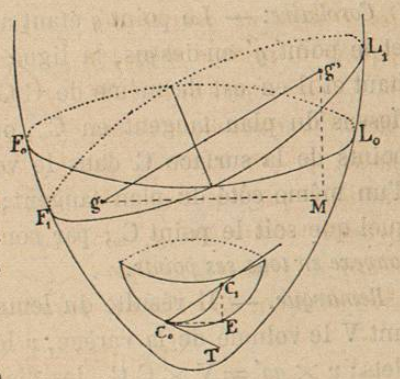

Fig. 5.

Soient F_0 et F_1 (fig. 5) deux flottaisons isocarènes,

C_0 et C_1 les centres de carène correspondants ; g et g' les centres de volume des onglets équivalents F_0F_1 et L_0L_1.

La carène F_1 peut être considérée comme déduite de la carène F_0 par le transport du volume de l'onglet F_0F_1, dans la position L_0L_1 ; d'après le lemme I le centre de la carène primitive viendra donc dans une position C_1 telle que C_0C_1 soit parallèle à la ligne gg' qui joint les centres de volume des onglets.

Si l'on fait rouler le plan F_1 sur la surface F, jusqu'à ce qu'il se rabatte sur F_0, le point C_1 décrira sur la surface C une courbe qui viendra aboutir en C_0 ; dans ce mouvement la ligne C_0C_1 qui est une corde de cette courbe tournera autour du point C_0, et viendra à la limite se confondre avec la tangente à la courbe en ce point. D'ailleurs cette corde reste parallèle à tout instant à la ligne gg', sa position limite sera donc parallèle à la position limite de gg', et par conséquent au plan F_0L_0.

Il est clair que, si l'on trace sur la surface C une ligne quelconque passant par le point C_0, on pourra, en faisant passer le plan F_1L_1 par les positions successives correspondantes à ses différents points, démontrer que la tangente à cette courbe en C_0 est parallèle à la flottaison ; le lieu géométrique de ces tangentes, c'est-à-dire le plan tangent en C_0 est donc parallèle à F_0L_0.

Corollaire. — Le point g étant au-dessous de la flottaison, et le point g' au-dessus, la ligne gg' est dirigée de bas en haut et il en est de même de C_0C_1 ; le point C_1 est donc au-dessus du plan tangent en C_0 ; on voit ainsi que tous les points de la surface C dans le voisinage de C_0 sont situés d'un même côté du plan tangent ; cette propriété est vraie quel que soit le point C_0, par conséquent : *la Surface C est convexe en tous ses points.*

Remarque. — Il résulte du lemme I que l'on a, en appelant V le volume de la carène, v le volume de l'un des onglets : $v \times gg' = V \times C_0C_1$, les deux lignes C_0C_1 et gg' étant parallèles, si on les projette sur deux droites gM et C_0E parallèles entre elles et à la flottaison, on aura entre ces projections le même rapport qu'entre les lignes elles-mêmes, et par suite il viendra

$$v \times gM = V \times C_0E.$$

Cette propriété nous sera utile plus loin.

Positions d'équilibre. — Il résulte du théorème II que, dans une position quelconque du flotteur, la perpendiculaire abaissée du centre de carène sur la flottaison correspondante est précisément la normale à la surface C ; par conséquent, la deuxième des conditions d'équilibre énoncées au paragraphe précédent sera réalisée lorsque la normale à la surface C passera par le centre de gravité.

Imaginons donc qu'on ait déterminé la surface F et la surface C correspondantes au poids du flotteur, et qu'on ait mené du point G à la surface C toutes les normales possibles ; on obtiendra une position d'équilibre en orientant le flotteur suivant une de ces normales et en le faisant descendre dans le liquide jusqu'à ce que sa surface F vienne reposer sur la surface libre ; il y aura autant de positions d'équilibre qu'on aura pu mener de normales.

Nous chercherons plus loin quelles sont, parmi ces positions, celles pour lesquelles l'équilibre est stable ; mais auparavant nous établirons une première propriété d'une surface nouvelle qui nous sera utile dans la suite.

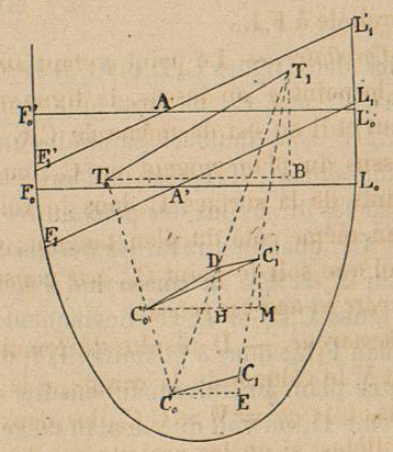

Fig. 6.

Surface des centres des tranches isocarènes ou Surface T. — Nous dirons qu'une tranche F_1F_1' (fig. 6),

comprise entre deux flottaisons parallèles, est isocarène avec la tranche F_0F_0', lorsque les flottaisons qui comprennent celle-ci sont respectivement isocarènes avec celles qui comprennent la précédente et nous appellerons *Surface des centres des tranches isocarènes* le lieu géométrique des centres de leurs volumes, par abréviation nous désignerons cette surface sous le nom de *Surface* T.

Théorème III. — *Le plan tangent à la surface T en un point quelconque est parallèle aux flottaisons correspondantes.* Soient respectivement C_0, C_0', T_0 les centres des carènes F_0L_0, $F_0'L_0'$ et de la tranche F_0F_0', et C_1, C_1', T_1, les centres des carènes obliques équivalentes F_1L_1, $F_1'L_1'$ et de la tranche isocarène $F_0'F_1'$; soit enfin V le volume de la carène inférieure, et ΔV le volume de la tranche. Les trois points $C_0C_0'T_0$ sont en ligne droite, de même que les trois points $C_1C_1'T_1$, et l'on a :

$$\frac{T_0C_0'}{C_0C_0'}=\frac{T_1C_1'}{C'C_1'}=\frac{V}{\Delta V}.$$

Joignons T_1C_0 et prenons sur cette ligne un point D tel que l'on ait :

$$\frac{T_1D}{C_0D}=\frac{V}{\Delta V};$$

les deux lignes $C_0'D$ et $C_1'D$ seront évidemment parallèles à T_0T_1 et C_0C_1, de sorte que les trois lignes T_0T_1, C_0C_1 et $C_0'C_1'$ sont toujours parallèles à un même plan, et que, par conséquent, T_0T_1 est toujours parallèle au plan déterminé par les directions des deux autres.

Or, quand on rabat les flottaisons F_1 et F_1' respectivement sur F_0 et F_1' en conservant l'équivalence des carènes, les lignes C_0C_1 et $C_0'C_1'$ deviennent à la limite parallèles au plan F_0L_0, donc à la limite T_0T_1 devient également parallèle à ce plan. En raisonnant ensuite comme on l'a fait au théorème II, on voit que le plan tangent en T_0 à la surface T est parallèle aux flottaisons.

Remarque. — Menons par les trois points T_0, C_0, C_0' trois droites parallèles et projetons sur ces droites les lignes T_0T_1, C_0C_1 et les trois côtés du triangle $C_0'DC_1'$; les projections de droites parallèles sur une même direction sont entre elles comme les droites elles-mêmes, on a ainsi :

$$\frac{HM}{C_0E}=\frac{DC_1'}{C_0C_1}=\frac{T_1C_1'}{T_1C_1}=\frac{V}{V+\Delta V} \qquad HM=C_0E.\frac{V}{V+\Delta V}$$

$$\frac{C_0'H}{T_0B}=\frac{C_0'D}{T_0T_1}=\frac{C_0C_0'}{T_0C_0}=\frac{\Delta V}{V+\Delta V} \qquad C_0'H=T_0B.\frac{\Delta V}{V+\Delta V}.$$

mais on a sur la figure

$$C_0'M=C_0'H+HM;$$

on aura donc :

$$\Delta V.\,T_0B=(V+\Delta V).\,C_0'M-V.\,C_0E.$$

Cette propriété nous sera utile dans la suite.