CHAPITRE II

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS

§ 1. — Principes généraux relatifs à la stabilité de l'équilibre des systèmes pesants.

Définition de la stabilité. — Au point de vue de la Statique pure, les conditions auxquelles nous sommes parvenus au début du chapitre précédent sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre, c'est-à-dire que le flotteur, placé au repos dans une des positions que nous avons indiquées, restera au repos si les agents extérieurs ne lui impriment aucun ébranlement. Mais, dans la nature, cette dernière condition est irréalisable; on conçoit donc que, parmi les positions d'équilibre auxquelles conduisent les méthodes de la Statique, les unes soient réalisables, c'est-à-dire *stables*, et les autres irréalisables, c'est-à-dire *instables*.

Propriétés des positions stables. — Lorsqu'un système pesant est soumis à des liaisons telles que ses différents points ne puissent descendre au-dessous de certaines limites, et qu'après l'avoir mis en mouvement on l'abandonne à lui-même, il finit toujours, au bout d'un temps plus ou moins long, par revenir spontanément au repos; si, dans cette position, on donne au système un ébranlement ou un dérangement qui ne dépasse pas certaines limites, il oscille quelques instants autour de sa position première et y revient bientôt en repos. Les positions d'équilibre qui jouissent de cette propriété

sont évidemment les seules qui soient réalisables, c'est-à-dire *stables*.

Condition pour qu'une position d'équilibre soit stable. — Nous dirons donc qu'une position d'équilibre sera stable lorsque cette position sera telle que, si l'on imprime au système en repos un ébranlement ou un dérangement suffisamment petit, il reviendra de lui-même à cette position après un intervalle plus ou moins long.

Mesure de la stabilité. — Les corps ou les systèmes pesants sont, en général, susceptibles de prendre plusieurs positions d'équilibre stable; si, dans une de ces positions, on leur donne un dérangement ou un ébranlement suffisamment grand, il peut arriver que le système abandonne sa position primitive et vienne se placer en repos dans une autre position d'équilibre; nous dirons alors que le système a *chaviré*. Nous prendrons pour mesure de la stabilité d'une position d'équilibre le *travail minimum qu'il faudrait dépenser pour faire chavirer le système en équilibre dans la position considérée.*

Application du théorème des forces vives aux systèmes formés par des liquides et des solides parfaits. — L'équation des forces vives appliquée à un système matériel quelconque est :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = T;$$

le second membre représente la somme des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures, et des liaisons pendant l'intervalle écoulé entre l'instant initial t_0 et l'instant final t.

Considérons actuellement un système matériel formé par des solides et des liquides contenus dans un vase fixe ou guidés par des liaisons fixes, et analysons les travaux des forces qui agissent pendant le mouvement, en supposant d'abord les surfaces parfaitement lisses et les liquides sans viscosité; on a successivement :

1° *La pesanteur,* qui sollicite toutes les parties du système et dont le travail total est égal au produit du poids du système par l'abaissement du centre de gravité, c'est-à-dire, si l'on désigne par h_0 et h les hauteurs de ce point, *au-dessus* d'un plan horizontal fixe, à l'instant initial et à l'instant final :

$$Ph_0 - Ph;$$

2° *Les pressions des parois* sur les molécules liquides ou sur les solides qui les touchent; les travaux de ces pressions sont nuls, car les vitesses des points qui les subissent sont tangentes aux parois et par conséquent normales aux directions des forces ;

3° *Les pressions des molécules liquides les unes sur les autres ;* on démontre que, par suite de l'*incompressibilité* des liquides, la somme totale des travaux de ces pressions est nulle. Il n'en serait pas de même pour un fluide compressible; on conçoit, en effet, que la molécule qui se dilate ou se comprime subit sur son pourtour des pressions dont les travaux ne sont pas nuls et que, par conséquent, si toute la masse se dilatait, la somme totale de travaux des pressions ne pourrait pas être nulle ;

4° *Les pressions des solides les uns sur les autres, des solides sur les liquides et inversement;* les travaux de ces forces sont égaux deux à deux et de signes contraires et leur somme est nulle ;

5° *La pression atmosphérique* qui s'exerce sur toute la surface libre ; on peut admettre que cette pression est la même en tous les points, à la condition de tenir compte, plus loin, parmi les résistances passives, des différences de pression qui se produisent lorsque le liquide refoule l'air ou recule devant lui. La somme des travaux de cette pression est nulle, car elle est égale, comme l'on sait, au produit de la pression sur l'unité de surface par le volume engendré par la surface entière, et il est clair que, le volume du système restant constant, le volume engendré par la surface libre est nul.

L'équation des forces vives se réduit donc, pour les systèmes considérés, à :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = Ph_0 - Ph. \qquad (1)$$

Conservation de l'énergie. — On peut mettre l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + Ph = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + Ph_0. \qquad (2)$$

M. Rankine a donné à la demi-force vive le nom d'*énergie actuelle,* à la quantité Ph celui d'*énergie potentielle* et à leur somme le nom d'*énergie totale;* l'équation qui précède montre que l'énergie totale reste constante pendant le mouvement.

Application aux systèmes naturels. — Dans les systèmes naturels, il faut ajouter aux forces dont nous avons déjà tenu compte, les frottements ainsi que les résistances dues à la viscosité du liquide; ces forces produisent des travaux résistants pendant tout le mouvement; de même, pour tenir compte des accroissements et des diminutions de la pression atmosphérique aux points où la surface libre refoule l'air ou recule devant lui, il faut ajouter à la pression uniforme des forces dirigées en sens contraire du mouvement, et qui produisent encore des travaux résistants; il suffira donc, pour étendre l'équation (1) aux systèmes naturels, d'ajouter au second membre un terme — K, essentiellement négatif, qui, nul au début du mouvement, croît sans cesse tant que la force vive n'est pas nulle; on aura donc :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + Ph = \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 + Ph_0 - K. \qquad (3)$$

Diminution de l'énergie. — On voit que, dans les systèmes naturels, l'énergie totale diminue sans cesse, absorbée par les travaux passifs ; toutefois, il ne faut pas oublier que les

forces passives, en travaillant, échauffent le système et que si l'on tenait compte, au premier membre, de l'*énergie calorifique*, on aurait encore conservation de l'énergie ; mais au point de vue géométrique et cinématique où nous nous plaçons, cette énergie est perdue par le système.

Condition nécessaire et suffisante à la stabilité de l'équilibre d'un système formé de liquides et de solides guidés par des appuis ou des enveloppes fixes. — Supposons que l'on ait pris, pour mesurer les hauteurs, le plan passant par la position la plus basse que le centre de gravité puisse occuper, et désignons par E_0 l'énergie totale du système au début du mouvement, on aura à tout instant :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + Ph = E_0 - K.$$

La demi-force vive étant essentiellement positive, l'énergie potentielle sera toujours au plus égale à $E_0 - K$, par conséquent le mouvement ascensionnel du centre de gravité sera limité par un plan horizontal dont la distance au plan du minimum sera à tout instant égale à

$$\frac{E_0 - K}{P};$$

la quantité K croissant sans cesse pendant le mouvement, l'écart des deux plans diminuera de plus en plus, et enfin quand elle sera égale à E_0, c'est-à-dire quand les forces passives auront absorbé toute l'énergie initiale, les deux plans coïncideront, le centre de gravité ne pourra donc plus se mouvoir verticalement.

D'un autre côté, on voit de même que, la hauteur h étant par hypothèse essentiellement positive, l'énergie actuelle à tout instant sera au plus égale à :

$$E_0 - K,$$

par conséquent, lorsque K sera égal à E_0, l'énergie actuelle

$\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ sera nulle et tous les points du système seront immobiles.

On voit ainsi que le système pesant considéré, abandonné à lui-même, viendra se placer dans une position telle que son centre de gravité soit plus bas que dans toute autre position voisine.

Travail nécessaire pour déranger un système d'une position d'équilibre stable. — Lorsque le système est en équilibre stable, son énergie est nulle, et on ne peut le déranger qu'à la condition de *dépenser de l'énergie*, c'est-à-dire de faire travailler sur lui des forces extérieures ; appliquant l'équation des forces vives au mouvement que prendra le corps primitivement en repos et soumis à l'action de ces forces, on aura :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + Ph = T - K,$$

$$T = Ph + \frac{1}{2}\Sigma mv^2 + K,$$

T représentant la somme des travaux des forces appliquées, h la hauteur dont s'est élevé le centre de gravité, $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ l'énergie actuelle et K la somme des travaux des forces passives.

Il résulte de là que, pour amener le système à sa position nouvelle, il a fallu dépenser un travail au moins égal à Ph ; le travail dépensé a servi, comme on voit, à élever le centre de gravité de 0 à h, à imprimer l'énergie actuelle $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$, et à compenser le travail K absorbé par les forces passives.

Mesure de la stabilité d'une position d'équilibre. — Lorsque le système considéré est dans une position d'équilibre stable, tout dérangement élève son centre de gravité et il faut, pour le faire passer dans une autre position stable, élever suffisamment ce point pour qu'il puisse franchir une certaine limite. Ainsi, lorsqu'un prisme est posé sur une table par une de ses faces, on ne peut le faire reposer sur

une autre face qu'à la condition de faire passer son centre de gravité par une hauteur au moins égale à celle dont il s'élèverait si on faisait pivoter le prisme autour d'un des côtés de sa base; par conséquent, d'après ce qu'on vient de voir, on ne pourra le faire chavirer qu'à la condition de dépenser un travail au moins égal au produit du poids par l'élévation minimum du centre de gravité correspondante aux rotations autour des différents côtés de la base.

D'une manière générale, si H est la hauteur minimum que doive franchir le centre de gravité d'un système pour passer d'une position d'équilibre à une autre, il faudra, pour faire chavirer ce système, dépenser un travail au moins égal à PH.

Résumé. — Principes généraux relatifs à la stabilité de l'équilibre et à sa mesure. — Les conclusions de ce qui précède peuvent être résumées ainsi :

1er *Principe.* — Pour qu'un système matériel, constitué comme nous l'avons dit plus haut et en repos dans une position donnée, soit en équilibre stable, il est nécessaire et suffisant que son centre de gravité soit plus bas que dans toute autre position voisine.

2e *Principe.* — Lorsque le système matériel considéré est en équilibre stable, on ne peut le déranger qu'à la condition de dépenser un travail au moins égal au travail que produirait la pesanteur pour le ramener à sa position d'équilibre.

3e *Principe.* — Lorsque le système est en équilibre stable, dans une position donnée, on ne peut le faire chavirer dans une autre position stable qu'à la condition de dépenser un travail supérieur au produit du poids par la hauteur que doit franchir le centre de gravité pour passer de la première position à la seconde.

Ces principes permettent de résoudre, par la géométrie pure, les problèmes relatifs à la stabilité de l'équilibre des systèmes; nous les appliquerons d'abord à l'étude de l'équilibre des corps ronds posés sur un plan horizontal; on verra que les résultats auxquels nous serons conduits sont directement applicables aux corps flottants.

§ 2. — Stabilité de l'équilibre des corps ronds posés sur un plan horizontal.

Cylindre convexe quelconque. *Conditions d'équilibre.* — Prenons pour plan de la figure 7 celui de la section droite qui contient le centre de gravité, et cherchons la position que doit occuper ce point pour que tout roulement du cylindre ait pour effet de l'élever.

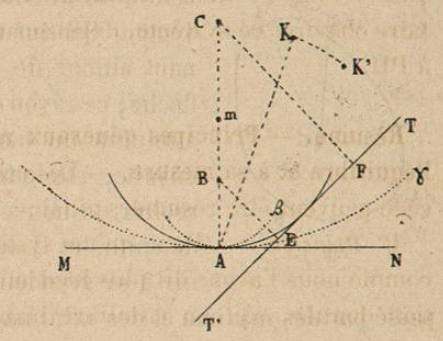

Fig. 7.

Soit m le centre de courbure de cette section droite au point d'appui A; de deux points B et C situés l'un au-dessous, l'autre au-dessus de m, décrivons deux circonférences β et γ; la première sera intérieure à la courbe dans le voisinage de A, et la deuxième sera extérieure. Menons un plan tangent quelconque TT′ dans le voisinage de A; si l'on fait rouler le cylindre jusqu'à ce que ce plan vienne s'appliquer sur MN, les distances des points B et C au plan horizontal, qui étaient primitivement BA et CA, deviendront BE et CF; on voit immédiatement sur la figure que BE est plus grand que le rayon BA du cercle β, et que CF est plus petit que le rayon CA du cercle γ.

Par conséquent, un roulement suffisamment petit du cylindre élève tous les points de la normale situés au-dessous de m, et abaisse tous ceux qui sont situés au-dessus.

Si l'on considère un point K en dehors de la normale, on

voit également qu'une rotation infiniment petite autour du point A dans un sens convenable ferait décrire à ce point un arc KK′ et pourrait l'abaisser.

Les seuls points de la section droite du cylindre, dont un mouvement *quelconque* augmente toujours la hauteur au-dessus du plan d'appui, sont donc les points situés sur la normale, au-dessous du point *m;* par conséquent, le centre de gravité devra se trouver sur la normale au point d'appui et au-dessous du centre de courbure.

Diverses positions d'équilibre. — Soit (fig. 8) G la position du centre de gravité; imaginons un rayon vecteur GS émanant de ce point et tournant autour de lui dans le sens de la flèche; ce rayon commencera par croître, atteindra un maximum en A, décroîtra ensuite, atteindra un minimum en B, croîtra de nouveau jusqu'en C et ainsi de suite, et il est clair que, pour revenir à sa grandeur première GS, il aura passé par des maxima et des minima se succédant alternativement; dans les positions correspondantes à ces maxima et minima, le rayon vecteur sera normal à la courbe; d'un autre côté, dans les positions telles que GA, correspondantes aux maxima, le rayon vecteur étant plus grand que les rayons vecteurs voisins, la circonférence décrite du point G avec GA comme rayon sera extérieure à la courbe; au contraire, dans les positions telles que GB, correspondantes aux minima, la circonférence décrite avec GB comme rayon sera intérieure. On voit ainsi que, suivant que le cylindre sera orienté suivant les normales maxima ou minima, le centre de gravité sera respectivement au-dessus ou au-dessous du centre de courbure correspondant au point d'appui et que, par conséquent, les positions d'équilibre stable seront celles pour lesquelles les normales minima seront verticales et dirigées en bas.

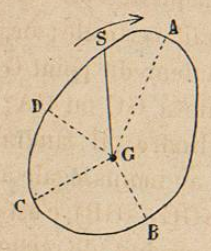

Fig. 8.

Il peut se présenter certains cas dans lesquels deux normales successives se confondent; ces normales étant de natures différentes, le rayon vecteur correspondant sera maximum relativement à une région de la courbe, minimum relativement à l'autre région; dans ce cas, le point G serait situé au centre de courbure lui-même, et les conditions nécessaires à la stabilité de l'équilibre ne seraient pas remplies.

Mesure de la stabilité des positions d'équilibre. — Considérons (fig. 8) la position d'équilibre correspondante à la normale GB; le cylindre ne peut passer de cette position à la position d'équilibre correspondante à GD qu'à la condition de passer par une position intermédiaire dans laquelle l'une des normales maxima voisines GC ou GA serait verticale; or, lorsque le cylindre est ainsi orienté, la hauteur du point G au-dessus du plan d'appui est au moins égale à GC ou GA; par conséquent, pour faire chavirer le cylindre, il faudra élever son centre de gravité d'une quantité au moins égale à la plus petite des quantités (GA — GB) ou (GC — GB), c'est-à-dire produire un travail supérieur au produit de cette quantité par le poids du solide; la stabilité de la position envisagée a donc pour mesure:

$$P(GC - GB).$$

Corps rond convexe. — Soit PP′ le plan d'appui (fig. 9); au point de contact C menons une tangente CA que nous appellerons *l'Axe d'inclinaison,* menons le cylindre tangent à la surface et parallèle à CA, et désignons ce cylindre sous le nom de *Cylindre d'inclinaison;* le centre de gravité doit être placé de telle manière que tout roulement de la surface sur le plan d'appui tende à accroître sa hauteur, il doit donc être placé de manière que

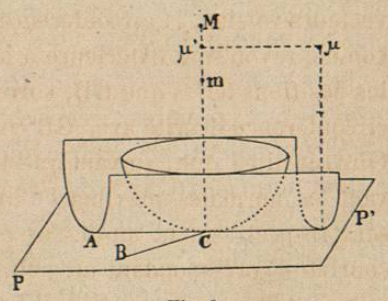

Fig. 9.

le roulement du cylindre d'inclinaison considéré produise cet effet; or il résulte de ce qu'on vient de voir qu'il devra être placé dans le plan normal au cylindre mené suivant CA. En raisonnant de la même manière pour le cylindre d'inclinaison correspondant à un autre axe quelconque CB, on voit que ce point doit être également placé dans le plan normal mené suivant CB; il sera donc nécessairement situé sur la normale CM. Enfin, si l'on marque sur cette normale les hauteurs $C\mu'$ des centres de courbure des sections droites des cylindres d'inclinaisons correspondants à toutes les tangentes menées au point C, et qu'on désigne par M et m le plus élevé et le plus abaissé de ces points, on arrive à cette conclusion que si le point G est situé au-dessous de m, tout roulement de la surface tendra à accroître sa hauteur, il y aura donc équilibre stable; si le point G est situé au-dessus de M, tout roulement de la surface tend à l'abaisser; enfin si le point G était situé entre les deux points M et m, certains roulements tendraient à l'élever, certains autres à l'abaisser; il est donc nécessaire et suffisant, pour qu'il y ait équilibre, que le point G soit situé sur la normale au point d'appui et au-dessous du point m.

Des métacentres. — Nous appellerons désormais *Métacentre* correspondant à un axe ou à un cylindre d'inclinaison le centre de courbure de la section droite du cylindre d'inclinaison; le plus élevé de ces points sera le *Grand métacentre*, le plus bas le *Petit métacentre*.

Autre méthode. — On peut ariver au même résultat sans recourir aux cylindres circonscrits; menons en effet (fig. 10) par la normale C_0K un plan quelconque qui détermine la section normale DC_0D', soit γ le centre de courbure de cette section; si l'on fait tourner ce plan autour de CN, le centre de courbure de la section normale correspondante se déplacera, et il passera dans un tour complet par deux positions extrêmes N et n. Il est clair que si, d'un point K situé au-dessus de N, on décrit une sphère avec KC_0 comme rayon, cette sphère sera extérieure à la surface dans le voisinage de

C_0, car ses sections normales auront des rayons KC_0 plus grands que les rayons des sections normales de la surface;

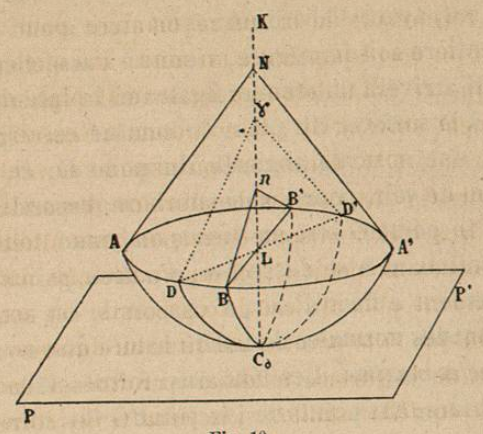

Fig. 10.

de même, une sphère décrite d'un point L situé au-dessous de n serait intérieure; enfin, une sphère décrite d'un point compris entre N et n serait en partie intérieure et en partie extérieure à la surface dans le voisinage du point C_0.

En raisonnant sur ces sphères comme on vient de le faire sur les cercles dans le cas du cylindre, on verrait que tout roulement de la surface sur le plan d'appui élèverait les points placés au-dessous de n, abaisserait ceux qui sont au-dessus de N, et qu'enfin, pour un point situé entre N et n, certains roulements produiraient une élévation, et certains autres un abaissement.

On est ainsi conduit à conclure que les points N et n coïncident précisément avec les métacentres extrêmes; donc les centres de plus grande et de plus petite courbure des *sections normales de la surface* coïncident avec les centres de plus grande et de plus petite courbure des *sections droites des cylindres tangents*.

On verra plus loin que les cylindres d'inclinaison correspondants au grand et au petit métacentre sont rectangulaires.