*Diverses positions d'équilibre.* — Imaginons une sphère liquide ayant pour centre le point G que nous supposerons intérieur à la surface du solide considéré ; et convenons que cette sphère, ayant d'abord un rayon assez grand pour que la surface entière soit immergée, vienne à s'assécher progressivement. Il arrivera un premier instant où la sphère deviendra tangente à la surface ; au point de contact correspondra évidemment une normale abaissée du point G, et, d'après ce qu'on vient de voir, pour l'orientation correspondante à cette normale, le point G sera au-dessus du grand métacentre ; la sphère continuant à se dessécher, d'autres points viendront successivement à fleur d'eau ; à chacun de ces sommets correspondront des normales de même nature que nous nommerons *normales maxima*. Les *îlots* ainsi formés viendront bientôt se rejoindre ; aux points de jonction des îles correspondront encore des normales, mais pour celles-ci la sphère décrite du point G sera en partie extérieure, en partie intérieure à la surface, et pour les orientations correspondantes ce point sera compris entre les deux métacentres ; nous nommerons ces normales des *normales mixtes*. Enfin, les îlots en se réunissant formeront des *lacs* qui se subdiviseront en d'autres plus petits et finiront par s'assécher ; aux points d'assèchement correspondront des normales que nous appellerons *normales minima ;* en ces points, la sphère tangente sera intérieure à la surface ; par conséquent, pour les orientations suivant ces normales, le point G sera au-dessous du petit métacentre. On voit donc que les positions d'équilibre stable seront celles pour lesquelles ces normales seront verticales et dirigées en bas.

*Mesure de la stabilité de l'équilibre.* — Désignons par $l$ la longueur d'une normale minimum, et supposons que la sphère liquide ait un rayon égal à $l$ ; si la sphère vient à croître, il se formera un lac au pied de la normale ; ce lac grandira et il viendra un instant où il s'unira à un lac voisin, au point de jonction correspondra une normale mixte dont nous désignerons la longueur par $l'$. Si l'on désigne par P le



poids du solide, le travail minimum nécessaire pour le faire passer de la position d'équilibre considérée à une autre est égal à

$$P\,(l' - l).$$

Pour démontrer cette propriété, il faut recourir à une surface auxiliaire, la *Podaire* de la surface du solide ; mais cette question n'offrant ici aucun intérêt pratique, nous renverrons pour la démonstration à un mémoire que nous avons publié dans la *Revue maritime* en 1879 (*Théorie nouvelle de la stabilité de l'équilibre des corps flottants*).

### § 3. — Stabilité de l'équilibre des corps flottants.

Pour nous placer dans les conditions prévues au § 1er du présent chapitre, nous considérerons le cas d'un flotteur posé sur un liquide contenu dans un vase fixe, et nous chercherons dans quelles positions du système le centre de gravité de l'ensemble du flotteur et du liquide sera à une hauteur minimum. Les conditions auxquelles nous parviendrons, étant indépendantes de la forme et de la grandeur du vase, seront applicables aux navires flottants sur la mer.

Nous reprendrons le problème à son origine pour le traiter entièrement à ce nouveau point de vue, c'est-à-dire sans faire appel aux résultats que nous a fournis au chapitre Ier l'application du principe d'Archimède et des règles de la Statique.

**1re condition.** *La surface libre du liquide doit être horizontale.* — Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi ; quelle que soit la position du corps, on pourra toujours imaginer (fig. 11) un plan horizontal HH′ tel que le volume du liquide situé au-dessus de lui soit égal à celui des vides laissés au-dessous ; par conséquent, si,

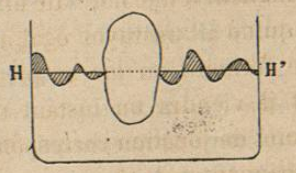

Fig. 11.

sans déranger le flotteur, on versait les masses de liquides situés au-dessus du plan dans les creux situés au-dessous, on abaisserait le centre de gravité du liquide et par suite celui du système. Ce point ne serait donc pas à une hauteur minimum.

**2e condition.** *Le poids du liquide déplacé doit être égal au poids du flotteur.* — Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que, quelle que soit la manière dont le flotteur est orienté dans l'espace, si on le descend parallèlement à lui-même dans le liquide en repos, le centre de gravité du système s'abaissera tant que le poids du liquide déplacé sera moindre que celui du flotteur, et qu'il s'élèvera à partir de l'instant où les deux poids seront devenus égaux.

Or, il est clair que tant que le flotteur sera au-dessus de la surface libre, le centre de gravité du système s'abaissera en même temps que celui du flotteur; mais lorsque le corps commencera à plonger, il se produira une élévation du niveau du liquide; par suite, en même temps que le centre de gravité du flotteur s'abaissera, celui du liquide s'élèvera et le mouvement du centre de gravité du système dépendra à la fois de ces deux mouvements.

Soient respectivement : $g$, $g'$, G les centres de gravité du flotteur du liquide et du système, $p$, $p'$, $P = p + p'$, leurs poids, et $y$, $y'$, Y les hauteurs de $g$, $g'$, G au-dessus d'un plan fixe quelconque.

On a par le théorème des moments :

$$PY = py + p'y'.$$

Si on abaisse le flotteur d'une quantité infiniment petite $dy$, les hauteurs Y et $y'$ varieront de quantités $dY$ et $dy'$ satisfaisant à la relation :

$$PdY = pdy + p'dy'. \qquad (1)$$

Pour évaluer $dy'$ en fonction de $dy$, imaginons le flotteur (fig. 12) décomposé en un nombre infiniment grand de cylin-



dres verticaux à base infiniment petite; il est évident que si, au lieu de faire descendre le corps tout entier de la hauteur $dy$ on fait descendre l'un après l'autre tous les cylindres élémentaires de cette même quantité, le déplacement final de $g'$ sera le même, et si l'on appelle $\delta y'$ l'accroissement de $y'$ résultant de l'abaissement de l'un quelconque des cylindres, on aura :

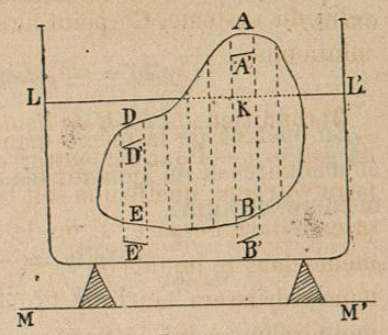

Fig. 12.

$$dy' = \Sigma \delta y',$$

le signe $\Sigma$ s'étendant à tous les cylindres.

Considérons d'abord un cylindre AB en partie plongé; en l'abaissant de la hauteur $dy$, on chassera à la partie inférieure un élément BB' de liquide et le niveau s'élèvera de la même quantité que si l'on répandait cet élément sur la surface libre; le centre de gravité $g'$ s'élèvera donc de la même quantité que si l'on transportait l'élément BB' de sa position primitive à la surface libre; désignant par $\rho$ le poids spécifique du liquide, par $ds$ la surface de la section droite du cylindre élémentaire, et par $l$ la profondeur KB à laquelle se trouve BB', on aura, en écrivant que la variation du moment de la masse totale est égale à la variation du moment de l'élément BB', et remarquant que $dy$ est négatif :

$$p'\delta y' = BB'l\rho = -\rho l ds dy,$$

et en appelant $v = lds$, le volume de la partie immergée du cylindre AB :

$$p'\delta y' = -\rho v dy.$$

Considérons maintenant un cylindre immergé en entier, tel que DE; ce cylindre, en s'abaissant, chassera, à sa partie inférieure un élément de liquide, de volume égal à $dsdy$; mais

il laissera à sa partie supérieure un vide de même volume et la variation de $p'y'$ sera la même que si l'on avait élevé l'élément liquide de la hauteur totale du cylindre, on aura donc encore :

$$p'\delta y' = -\rho l d s d y = -\rho v d y.$$

En opérant de la même manière pour tous les cylindres élémentaires et en ajoutant les égalités obtenues membre à membre, on aura :

$$\Sigma p'\delta y' = -\Sigma \rho v d y$$
$$p'\Sigma\delta y' = -\rho d y \Sigma v,$$

c'est-à-dire en désignant par V le volume de la carène immergée ou du liquide déplacé :

$$p' d y' = -\rho V d y.$$

Substituant enfin dans l'équation différentielle (1), on aura :

$$P d Y = (p - \rho V)\, d y.$$

On voit donc que $dY$ et $dy$ sont de même signe si $p > \rho V$, et de signes contraires si $p < \rho V$ ; donc, quand on abaissera le flotteur, le point G descendra jusqu'à ce que l'on ait

$$p = \rho V, \qquad (2)$$

c'est-à-dire jusqu'à ce que le poids du liquide déplacé soit égal à celui du corps, et remontera ensuite.

**3e condition.** — Nous n'avons plus maintenant à comparer entre elles que les positions diverses dans lesquelles le flotteur déplace son poids de liquide, c'est-à-dire les positions obtenues en le faisant rouler par sa surface F sur la surface libre du liquide ; nous allons montrer que :

*Pour être en équilibre stable, le flotteur doit avoir la même orientation que s'il reposait sur un plan horizontal par sa surface des centres de carène.*



Conservant sur la figure 13 les notations précédentes, désignons en outre par $\gamma$ le centre du volume compris dans le vase au-dessous du plan AB et par C le centre de la carène ; le point $\gamma$ est constant pour toutes les positions que peut occuper le flotteur, car le volume compris au-dessous de la surface libre du liquide est égal au volume du liquide augmenté du volume de la carène, et ce dernier reste constant, puisque nous ne considérons que les positions isocarènes du flotteur.

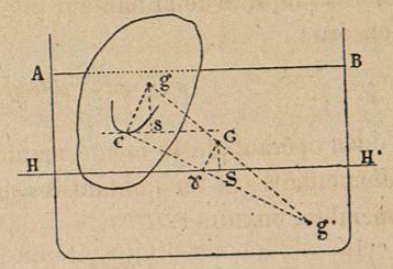

Fig. 13.

Les points $g'$, $\gamma$, C sont en ligne droite, car le point $\gamma$ est le centre d'un volume composé de deux parties dont les centres sont $g'$ et C ; les volumes respectifs de ces parties sont :

$$\frac{p'}{\rho} \qquad \frac{p}{\rho}$$

et l'on a par le théorème des moments :

$$\frac{p'}{\rho} g'\gamma = \frac{p}{\rho} C\gamma.$$

De même le point G, centre de gravité du système formé par le liquide et le flotteur, est situé sur la droite $g'g$ et l'on a :

$$p'.g'G = p.gG,$$

de ces deux égalités, on déduit :

$$\frac{p}{p'} = \frac{g'G}{gG} = \frac{g'\gamma}{C\gamma},$$

par conséquent, les droites $Cg$ et $\gamma G$ sont parallèles et l'on a :

$$\frac{G\gamma}{Cg} = \frac{g'\gamma}{g'C} = \frac{g'\gamma}{\gamma + \gamma C} = \frac{p}{p + p'} = \frac{p}{P}.$$

Si, par les points C et $\gamma$, on mène des plans horizontaux C$s$ et $\gamma$H, on aura, entre les distances GS et $gs$ des points $g$ et G à ces plans, la relation :

$$\frac{GS}{gs} = \frac{G\gamma}{gC} = \frac{p}{P}$$

donc

$$P.GS = p.gs; \qquad (3)$$

cette relation s'applique à toutes les positions isocarènes.

Mais GS est la hauteur du centre de gravité au-dessus d'un plan horizontal HH', qui passe par le point fixe $\gamma$, c'est-à-dire au-dessus d'un plan fixe; la hauteur du centre de gravité sera donc minimum en même temps que GS, et, par conséquent, que $gs$, car $p$ et P sont constants.

Or, d'après un théorème démontré plus haut, le plan CS est le plan tangent en C à la surface C ; il faut donc, pour que le point G soit à une hauteur minimum, que le point $g$ soit à une distance minimum du plan tangent à la surface C correspondant à sa position actuelle.

Cette condition est précisément celle à laquelle devrait satisfaire un solide dont le centre de gravité serait en $g$, et qui reposerait sur un plan horizontal par la surface C; c'est ce qu'il fallait démontrer.

**Conclusions.** — Il résulte de l'étude que nous avons faite des conditions d'équilibre des corps ronds, que le centre de gravité doit être situé sur la normale à la surface au point d'appui et au-dessous du petit métacentre ; nous pouvons donc actuellement conclure immédiatement de ce qui précède, que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un flotteur soit en équilibre stable sont les suivantes :

1° La surface libre du liquide doit être horizontale ;

2° La surface F du flotteur doit être tangente à cette surface libre ;

3° Le centre de gravité doit être sur la normale à la surface C au point correspondant à la carène immergée et au-dessous du petit métacentre de cette surface.



**Limite du travail nécessaire pour déranger un flotteur en équilibre stable.** — On a vu plus haut (chap. II, § 1er) que pour déranger de sa position un système en équilibre stable, il faut dépenser un travail T donné par l'expression :

$$T = Ph + \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - K,$$

dans laquelle $\Sigma mv^2$ représente la force vive dont le système a été animé, $h$ la quantité dont a été élevé son centre de gravité et K la somme des travaux absorbés par les forces passives pendant le changement de position.

Or, pour amener à une position quelconque le système composé du flotteur et du liquide supposés primitivement en équilibre, on peut d'abord donner au flotteur l'orientation considérée en le maintenant isocarène dans le liquide en repos, conservant ensuite cette orientation, on l'élèvera ou on l'abaissera de la quantité nécessaire, et l'on donnera enfin au liquide son dénivellement.

Dans la première transformation, on aura, avec les notations de la figure 13 :

$$Ph = P(GS - GS_0) = (pgs - gs_0);$$

on a vu d'ailleurs que, dans chacune des deux dernières, on produit une élévation du centre de gravité, on aura donc :

$$Ph > p(gs - gs_0)$$

et par conséquent :

$$T > p(gs - gs_0) + \frac{1}{2}\Sigma mv^2 - K.$$

Donc le travail nécessaire pour déranger un flotteur en équilibre est plus grand que le produit du poids du flotteur

par l'accroissement de la distance du centre de gravité au plan tangent à la surface des centres de carène.

**Mesure de la stabilité.** — Enfin l'application du troisième principe du § 1er conduirait à des conclusions analogues à celles que nous avons trouvées pour les corps ronds posés sur un plan; cette question n'offrant pas un intérêt immédiat pour la pratique, nous ne croyons pas utile de la traiter ici; nous renverrons donc de nouveau au mémoire précité (*Théorie nouvelle de la stabilité de l'équilibre des corps flottants*).

### § 4. — Géométrie des flotteurs (2e approximation).

**Définitions.** — Soient $F_0$ et $F_0'$ (fig. 14), deux flottaisons parallèles détachant dans le flotteur des carènes de volume V, V + ΔV, et une tranche de volume ΔV.

Prenons pour plan de la figure un plan perpendiculaire à ces flottaisons; soient $T_0$, $K_0$, $C_0$ les projections sur ce plan des points correspondants des trois surfaces T, F et C; les plans tangents en ces trois points sont parallèles à $F_0$ et leurs traces sont parallèles à la trace de cette flottaison.

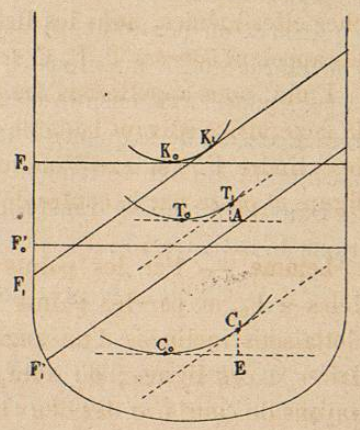

Fig. 14.

Imaginons de même deux flottaisons inclinées $F_1$, $F_1'$, isocarènes avec les précédentes et perpendiculaires à la figure, et soient $T_1$, $F_1$, $C_1$, les projections des points des trois surfaces correspondant à ces flottaisons; les plans tangents en ces points sont encore parallèles et leurs traces sur la figure sont parallèles entre elles et à celles des nouvelles flottaisons.



Toutes les flottaisons isocarènes avec $F_0$ et perpendiculaires à la figure, auront pour enveloppe un cylindre tangent à la surface F et perpendiculaire à la figure; de même, les plans tangents aux surfaces T et C auront pour enveloppes des cylindres tangents à ces surfaces et parallèles aux précédents.

Les traces de ces plans auront pour enveloppes les sections droites des trois cylindres, et ces sections droites seront en même temps les lieux géométriques des projections des points T, F, C, correspondants aux flottaisons envisagées.

Nous appellerons *Plan d'inclinaison* le plan de la figure, *Cylindres* T, F, C, les trois cylindres perpendiculaires à ce plan, et *Courbes* T, F, C, les sections droites de ces trois cylindres; nous remarquerons que ces trois courbes planes sont les projections des trois courbes, en général gauches, suivant lesquelles les trois cylindres touchent les trois surfaces, et lorsque nous voudrons parler de ces courbes gauches elles-mêmes, nous les distinguerons des précédentes en les appelant *Courbes* T, F, C *de l'espace*.

Enfin, nous appellerons *Axe d'inclinaison* d'une flottaison $F_0$ la génératrice suivant laquelle cette flottaison est touchée par le cylindre F; cet axe d'inclinaison se projette en $K_0$ sur la figure et passe par le centre de la flottaison $F_0$.

**Lemme.** — Par les points $T_0$ et $C_0$ menons des parallèles à $F_0$, et par les points $T_1$ et $C_1$, correspondants aux flottaisons inclinées d'un angle $\theta$, menons des perpendiculaires à ces lignes; on aura, en désignant par $r$ et $\rho$, les rayons de courbure des deux courbes T et C :

$$r = \lim. \frac{T_0A}{\theta}, \qquad \rho = \lim \frac{C_0E}{\theta}.$$

On a, en effet, pour l'une quelconque des deux courbes, la courbe C, par exemple :

$$\rho = \lim. \frac{\text{arc } C_0C_1}{\theta} = \lim. \frac{\text{arc } C_0C_1}{\text{corde } C_0C_1} \times \frac{\text{corde } C_0C_1}{\theta} = \lim. \frac{\text{corde } C_0C_1}{\theta}$$

$$\rho = \lim. \frac{\text{corde } C_0C_1}{C_0E} \times \frac{C_0E}{\theta} = \lim. \frac{1}{\cos C_1C_0E} \cdot \frac{C_0E}{\theta} = \lim. \frac{C_0E}{\theta}.$$

**Théorème IV.** — *Courbure de la courbe* C, $\rho = \frac{I}{V}$. — D'après le lemme qui vient d'être établi, on a :

$$\rho = \lim. \frac{C_0E}{\theta},$$

mais d'après la remarque du théorème II, p. 9, on a (fig. 15) :

$$V \cdot C_0E = v \cdot gM = v \cdot gI + v \cdot IM;$$

Le second membre de cette expression représente la somme des valeurs absolues des moments des deux onglets relativement à un plan vertical mené par l'intersection D des deux flottaisons; pour évaluer ces moments, élevons un cylindre droit sur la flottaison $F_0$; soit S un élément de l'aire $DL_0$,

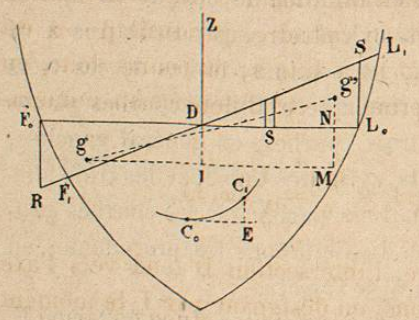

Fig. 15.

désignons par $\omega$ sa surface, et par $y$ sa distance à l'intersection D; on a pour le moment de ce cylindre élémentaire relativement au plan DZ :

$$\text{moment} = \text{volume} \times y = \omega y \operatorname{tg}\theta \times y = \omega y^2 \operatorname{tg}\theta$$

et pour l'onglet de cylindre :

$$\text{moment} = \operatorname{tg}\theta . \Sigma \omega y^2.$$

En appelant $\omega'$ un élément de l'aire $DF_0$ et $y'$ son ordonnée, on trouve de même :

$$\text{moment} = \operatorname{tg}\theta . \Sigma \omega' y'^2.$$

Désignant enfin par $\alpha$ et $\beta$ les moments des couronnes $F_0F_1R$ et $L_0L_1S$, on aura :

$$\text{Moment onglet } F_0F_1 = \operatorname{tg}\theta . \Sigma \omega y^2 - \alpha$$
$$\text{Moment onglet } L_0L_1 = \operatorname{tg}\theta . \Sigma \omega' y'^2 + \beta$$



on aura donc, en représentant par $I_\theta$ le moment d'inertie de l'aire $F_0L_0$ relativement à l'intersection D de la flottaison isocarène inclinée de l'angle $\theta$ :

$$V \cdot C_0E = I_\theta \operatorname{tg}\theta + (\beta - \alpha)$$

et par conséquent :

$$\frac{C_0E}{\theta} = \frac{1}{V}\left[\frac{I_\theta \operatorname{tg}\theta + (\beta - \alpha)}{\theta}\right].$$

Les quantités $\alpha$ et $\beta$ sont infiniment petites relativement aux moments des onglets de cylindre, par suite $\beta - \alpha$ est infiniment petit relativement à $I_\theta \operatorname{tg}\theta$; on pourra donc, en passant à la limite, supprimer cette différence au numérateur, et l'on aura :

$$\rho = \lim. \frac{1}{V} I_\theta \times \frac{\operatorname{tg}\theta}{\theta} = \frac{1}{V} \lim. I_\theta.$$

Lorsque $\theta$ tend vers zéro, l'intersection D tend vers l'axe d'inclinaison; on aura donc, en désignant par I le moment d'inertie de la flottaison relatif à l'axe d'inclinaison :

$$\rho = \frac{I}{V}.$$

**Théorème V.** — *Courbure de la courbe* T, $r = \frac{\Delta I}{\Delta V}$. — Reportons-nous à la figure 6, page 9, supposons que le plan de cette figure soit le plan d'inclinaison, et que, par conséquent, les lignes $T_0T_1$, $C_0C_1$, $C_0'C_1'$, représentent respectivement des cordes des trois courbes T, C et C', et $T_0B$, $C_0'M$, $C_0E$, les projections de ces cordes sur des parallèles à la trace de la flottaison.

On a, d'après le lemme II :

$$r = \lim. \frac{T_0B}{\theta}.$$

Mais la *Remarque* du théorème III donne :

$$\Delta V \cdot \overline{T_0B} = (V + \Delta V) \cdot C_0'M - V \cdot C_0E. \qquad (1)$$