D'un autre côté, on vient de voir, au théorème IV, que l'on avait les relations :

$$(V+\Delta V)\cdot C_0'M = I'_\theta \operatorname{tg}\theta + \varepsilon'$$
$$V\cdot C_0E = I_\theta \operatorname{tg}\theta + \varepsilon$$

dans lesquelles I_θ et I_θ' représentent respectivement les moments d'inertie des flottaisons F_0 et F_0' relativement aux axes qui se projettent en A et A', et ε et ε' des quantités infiniment petites par rapport à celles auxquelles elles sont ajoutées; on aura donc, en substituant dans (1) :

$$\Delta V\cdot \overline{T_0B} = \operatorname{tg}\theta\,(I'_\theta - I_\theta) + \varepsilon' - \varepsilon$$

et par conséquent :

$$r = \lim.\ \frac{\overline{T_0B}}{\theta} = \frac{1}{\Delta V}\lim.\ (I'_\theta - I_\theta)\times\frac{\operatorname{tg}\theta}{\theta}$$
$$r = \frac{1}{\Delta V}\lim.\ (I'_\theta - I_\theta).$$

si l'on fait tendre θ vers zéro, les axes A et A' viennent se confondre l'un et l'autre avec les axes d'inclinaison des flottaisons F_0 et F_0' ; si donc on appelle I et $I+\Delta I$ les moments d'inertie des deux flottaisons relatifs aux axes d'inclinaisons perpendiculaires à la figure, on aura :

$$r = \frac{\Delta I}{\Delta V}.$$

Remarque. — En divisant par θ les deux membres de (1) et passant à la limite, on obtient immédiatement l'expression :

$$\Delta V\cdot r = (V+\Delta V)\rho' - V\rho$$

ρ' représentant ici le rayon de courbure de la courbe C de la deuxième carène; on remarque, d'ailleurs, que $(V+\Delta V)\rho'$ représente la valeur que prend $V\rho$ quand on passe à la deuxième carène, on peut donc écrire :

$$r\cdot\Delta V = \Delta(V\rho).$$

Cette formule est équivalente à la précédente, car $I = V\rho$.

Théorème VI. — *Courbure de la courbe* F, $\rho' = \frac{dI}{dV}$, ou $\rho' = \rho + V\frac{d\rho}{dV}$.

Si l'on suppose que la flottaison F_1 se rapproche indéfiniment de la flottaison F_0, la courbe T aura pour limite la courbe F, le rayon de courbure de celle-ci est donc la limite vers laquelle tend r quand ΔV tend vers zéro, on a ainsi :

$$\rho' = \frac{dI}{dV} \quad \text{ou encore} \quad \rho' = \frac{d(V\rho)}{dV} = \rho + V\frac{d\rho}{dV}.$$

Résumé. — Si, dans le plan d'une flottaison F_0, on trace un axe d'inclinaison, et que l'on considère simultanément dans le flotteur les trois courbes C, T, F, correspondantes au plan d'inclinaison perpendiculaire à cet axe, les rayons de courbure auront respectivement pour valeurs :

$$\rho = \frac{I}{V}, \qquad r = \frac{\Delta I}{\Delta V}, \qquad \rho' = \frac{dI}{dV}.$$

Ces quantités sont, comme on l'a vu au § 2, chapitre II (Corps ronds), les hauteurs des métacentres des trois surfaces, correspondants aux cylindres tangents parallèles à l'axe d'inclinaison tracé dans la flottaison.

Pour trouver les grands métacentres et les petits métacentres de chaque surface, il nous reste à examiner comment varient pour chacune d'elles les hauteurs des métacentres quand on fait tourner l'axe d'inclinaison autour du centre de la flottaison.

Thorème VII. — *Soit* (fig. 16) K *le centre de la flottaison* F_0L_0, *représentée en vraie grandeur sur la figure,* KA *un axe d'inclinaison quelconque, si l'on porte sur tous les axes tels que* KA, *trois longueurs* Kc, Kt, K*f*, *respectivement égales à* $\frac{1}{\sqrt{\rho}}, \frac{1}{\sqrt{r}}, \frac{1}{\sqrt{\rho'}}$, *on obtient trois courbes du second ordre ayant leur centre en* K ; *la première est toujours une ellipse, les deux*

autres peuvent être, suivant les cas, des ellipses ou des hyperboles.

Nous appellerons ces trois courbes les *Indicatrices* des trois surfaces[1].

Soit, en effet, ω un élément de l'aire F_0L_0, d sa distance à l'axe d'inclinaison KA, x et y ses coordonnées relatives à deux axes rectangulaires quelconques ; soit enfin α formé par KA avec l'axe OX, on a :

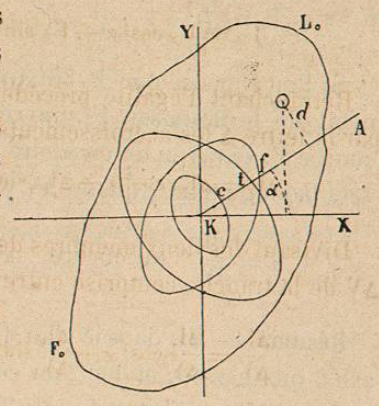

Fig. 16.

$$d = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$
$$d^2 = y^2\cos^2\alpha + x^2\sin^2\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\omega d^2 = \omega y^2.\cos^2\alpha + \omega x^2.\sin^2\alpha - 2\omega xy.\sin\alpha\cos\alpha.$$

Établissons les égalités analogues pour tous les éléments de l'aire, faisons leur somme membre à membre, et désignons par I_α, I_x, I_y les moments d'inertie de l'aire relatifs aux axes KA, KX, KY,

$$I_\alpha = \Sigma\omega d^2, \qquad I_x = \Sigma\omega y^2, \qquad I_y = \Sigma\omega x^2,$$

et par P la somme $\Sigma\omega xy$, on aura :

$$I_\alpha = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^1\alpha - 2P\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Désignant par I_α', I'_x, I'_y, P' les éléments analogues pour une flottaison F_0' parallèle à la première dans laquelle les axes de coordonnées seraient parallèles aux précédents et

1. Ch. Dupin a donné le nom d'indicatrice à la courbe dont les rayons vecteurs sont proportionnels aux racines carrées des rayons de courbure des sections normales ; pour toute surface courbe continue autour d'un point donné, l'indicatrice est, en général, une ellipse ou un système de deux hyperboles conjuguées ; et l'on démontrerait aisément que les courbes que nous considérons ici sont précisément les indicatrices des trois surfaces C, T et F.

auraient pour origine le centre K′ de cette flottaison, on aura de même :

$$I'_\alpha = I'_x\cos^2\alpha + I'_y\sin^2\alpha - 2P'\sin\alpha\cos\alpha.$$

Retranchant l'égalité précédente de celle-ci et désignant par la lettre Δ les accroissements des coefficients, on obtient :

$$\Delta I_\alpha = \Delta I_x.\cos^2\alpha + \Delta I_y.\sin^2\alpha - 2\Delta P.\sin\alpha\cos\alpha.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par le volume ΔV de la tranche comprise entre F_0 et F_0', on aura :

$$\frac{\Delta I_\alpha}{\Delta V} = \frac{\Delta I_x}{\Delta V}\cos^2\alpha + \frac{\Delta I_y}{\Delta V}\sin^2\alpha - 2\frac{\Delta P}{\Delta V}\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (2)$$

Enfin, cette relation étant vraie quelle que soit la valeur de ΔV, elle reste vraie à la limite quand ΔV tend vers zéro et l'on a en dernier lieu :

$$\frac{dI_\alpha}{dV} = \frac{dI_x}{dV}\cos^2\alpha + \frac{dI_y}{dV}\sin^2\alpha - 2\frac{dP}{dV}\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (3)$$

La relation (1) peut encore s'écrire :

$$\frac{I_\alpha}{V} = \frac{I_x}{V}\cos^2\alpha + \frac{I_y}{V}\sin^2\alpha - \frac{2P}{V}\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (1)$$

Indicatrice de la surface C.— Désignons actuellement par ρ_α, ρ_x, ρ_y les rayons de courbure des courbes C correspondantes aux axes d'inclinaison KA, KX, KY, on aura :

$$\rho_\alpha = \frac{I_\alpha}{V}, \qquad \rho_x = \frac{I_x}{V}, \qquad \rho_y = \frac{I_y}{V},$$

et en substituant dans l'équation (1) transformée comme on vient de le voir, il viendra :

$$\rho_\alpha = \rho_x\cos^2\alpha + \rho_y\sin^2\alpha - 2\frac{P}{V}\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (4)$$

Les moments d'inertie étant essentiellement positifs, il en

sera de même des valeurs de ρ_α, quel que soit α, par conséquent $\sqrt{\rho_\alpha}$ sera réelle; portons sur KA une longueur égale à $\frac{1}{\sqrt{\rho_\alpha}}$, et désignons par X et Y les coordonnées du point ainsi obtenu, on aura :

$$X = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\rho_\alpha}} \quad \text{d'où} \quad \cos\alpha = X\sqrt{\rho_\alpha}$$

de même on aura : $\sin\alpha = Y\sqrt{\rho_\alpha}$

et en substituant dans (4) on aura, après réduction :

$$1 = X^2\rho_x + Y^2\rho_y - 2\frac{P}{V}\cdot XY. \qquad (5)$$

Cette équation est celle d'une courbe du second ordre rapportée à son centre; elle représente, en général, une ellipse ou une hyperbole, mais comme ici les rayons de courbure $\rho_\alpha = \frac{I_\alpha}{V}$ ne peuvent pas être nuls, les rayons vecteurs de la courbure ne peuvent être infinis, par conséquent la courbe est une ellipse dans tous les cas.

Indicatrice de la surface T. — Désignant par r_α, r_x, r_y les rayons de courbure des courbes T correspondantes aux axes d'inclinaison KA, KX, KY, on aura de même :

$$r_\alpha = \frac{\Delta I_\alpha}{\Delta V}, \qquad r_x = \frac{\Delta I_x}{\Delta V}, \qquad r_y = \frac{\Delta I_y}{\Delta V}$$

et par substitution dans (2) :

$$r_\alpha = r_x\cos^2\alpha + r_y\sin^2\alpha - 2\frac{\Delta P}{\Delta V}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Les quantités telles que ΔI pouvant être négatives, nous distinguerons ici deux cas; considérant d'abord les valeurs positives de r_α, on portera sur les axes d'inclinaisons correspondants des longueurs égales à $\frac{1}{\sqrt{r_\alpha}}$, et en appelant X, Y

les coordonnées du point obtenu, on aura, comme précédemment entre ces coordonnées, la relation :

$$1 = X^2 r_x + Y^2 r_y - 2\frac{\Delta P}{\Delta V}XY. \qquad (6)$$

Considérant ensuite les valeurs négatives de r_α, et portant sur les axes d'inclinaison correspondants des longueurs égales à $\frac{1}{\sqrt{-r_\alpha}}$, on aura de même :

$$1 = -X^2 r_x - Y^2 r_y + \frac{\Delta P}{\Delta V}XY. \qquad (7)$$

Si r_α conserve le même signe, quel que soit α, le lieu géométrique des extrémités des rayons vecteurs est une ellipse; si r_α peut être négatif et positif, il existera deux valeurs de α pour lesquelles cette quantité sera nulle; les deux axes correspondants seront les asymptotes des deux hyperboles conjuguées représentées par les équations (6) et (7). Dans l'angle de ces deux lignes pour lequel toutes les valeurs de r_α seront positives, c'est-à-dire pour l'une des deux hyperboles, les métacentres seront au-dessus de la surface T; pour les autres axes d'inclinaison, c'est-à-dire pour l'autre hyperbole, les métacentres seront situés au-dessous.

Indicatrice de la surface F. — En raisonnant de la même manière pour la surface F, on verrait que l'indicatrice peut être encore, suivant le cas, une ellipse ou un système de deux hyperboles conjuguées.

Les équations de ces hyperboles seront :

$$1 = X^2\rho'_x + Y^2\rho'_y - 2\frac{dP}{dV}XY \qquad (8)$$

$$1 = -X^2\rho'_x - Y^2\rho'_y + 2\frac{dP}{dV}XY. \qquad (9)$$

Remarque. — Les rayons de courbure des courbes T et F peuvent être tous négatifs au point considéré, alors les surfaces présentent leur concavité en bas; ils peuvent être positifs

pour certains axes d'inclinaison et négatifs pour d'autres, alors ces surfaces offrent au point considéré deux courbures inverses comme le paraboloïde hyperbolique (selle de cheval). Nous avons toujours supposé, pour la clarté des figures, que ces surfaces offraient des courbures analogues à celle de la surface C, mais nos raisonnements s'appliquent à des formes quelconques.

Flottaisons symétriques. — Lorsque la flottaison considérée présente un axe de symétrie, cet axe coïncide avec l'un des axes de l'indicatrice de la courbe C. Il est clair, en effet que si l'on prend cet axe de symétrie pour axe des y, à chaque élément (ω, x, y) correspondra un élément équivalent, dont les coordonnées seront $-x$, y, par conséquent à chaque produit tel que ωxy correspondra un produit $-\omega xy$ égal et de signe contraire ; par conséquent, la somme $P = \Sigma\omega xy$ sera nulle, et l'équation (5) ci-dessus sera celle d'une ellipse rapportée à ses axes.

Lorsque la flottaison présentera deux axes de symétrie non rectangulaires, ces deux axes devant être l'un et l'autre des axes de l'ellipse, cette courbe sera un cercle ; alors tous les rayons de courbure seront égaux et les métacentres coïncideront en un même point. Ce cas se présente lorsque la flottaison est un cercle ou un polygone régulier quelconque. (Voir aux exercices du ch. III.)

Flotteurs symétriques. — Lorsque le flotteur présente un plan de symétrie perpendiculaire à la flottaison considérée, la quantité P est nulle pour toutes les flottaisons parallèles, par conséquent $\frac{\Delta P}{\Delta V}$ et $\frac{dP}{dV}$ sont nuls, et les équations 5, 6, 7, 8, 9 représentent toutes des courbes du second degré rapportées à leurs axes. Par conséquent, dans ce cas particulier les trois indicatrices ont pour axes l'axe de symétrie de la flottaison et un axe perpendiculaire à celui-ci.

Grands et petits métacentres. — Le grand et le petit métacentre de chaque surface correspondent au plus grand et au plus petit rayon de courbure ; par conséquent, le grand métacentre correspond à l'inclinaison autour du petit axe de l'indicatrice et le petit à l'inclinaison autour du grand axe.

Pour les flotteurs symétriques, on n'aura donc à s'occuper que des inclinaisons autour de l'axe de symétrie de la flottaison et autour d'un axe perpendiculaire à celui-ci.

Cas des navires. — Le navire est un flotteur symétrique par rapport au plan longitudinal ; par conséquent, sa surface F, sa surface C et une surface T quelconque sont symétriques par rapport à ce plan ; et les indicatrices de ces trois surfaces ont leurs axes dirigés suivant l'axe longitudinal et suivant un axe transversal passant par le centre de la flottaison.

Le grand métacentre de la surface C correspond à l'inclinaison de l'avant à l'arrière, et le petit à l'inclinaison transversale.

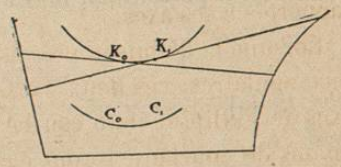

Fig. 17.

Courbes F *et* C *longitudinales* (fig. 17). — Les deux surfaces étant symétriques relativement au plan longitudinal, leurs cylindres transversaux d'inclinaison les toucheront suivant une ligne située dans ce plan ; la courbe F et la courbe C seront donc les lieux géométriques des centres des flottaisons et des centres de carène eux-mêmes.

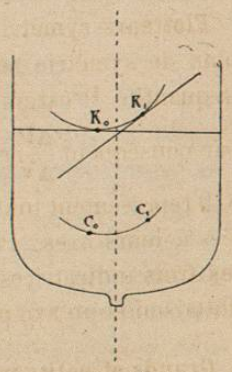

Fig. 18.

Courbes F *et* C *transversales* (fig. 18). — Mais pour les inclinaisons transversales, il n'en est plus ainsi à cause du défaut de symétrie de l'avant et de l'arrière ; le cylindre d'inclinaison perpendiculaire à la figure touche la surface F suivant une courbe symétrique de tribord à bâbord, mais dont les branches, au

lieu de rester parallèles au plan de la figure, s'inclinent sur l'avant et sur l'arrière.

La courbe C de l'espace a une forme analogue.

Par conséquent, dans le cas où le plan de la figure passerait par le point C_0 ou le point K_0, les points C_1 ou K_1 de l'espace seraient situés en avant ou en arrière de ce plan.

Pour la recherche des métacentres, cette particularité n'offre aucun inconvénient, puisque ce sont les rayons de courbure des sections droites des cylindres tangents que l'on a à considérer; mais dans l'étude de la stabilité, il faudrait en toute rigueur en tenir compte, car ce sont les centres de carène eux-mêmes que l'on doit envisager; cependant, la dissymétrie entre l'avant et l'arrière n'est pas considérable et on pourra, dans la mesure de précision dont l'étude de la stabilité sous les grandes inclinaisons est susceptible, négliger les distances du point C en avant ou en arrière du plan transversal passant par le centre de carène initial.

CHAPITRE III

EXERCICES SUR LA THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS.

Carènes complémentaires. — Dans tout flotteur fermé (fig. 19), une même flottaison FL détache deux carènes dites *complémentaires*.

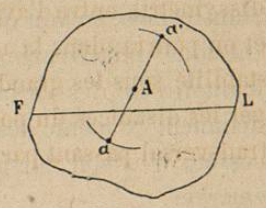

Fig. 19.

Les Surfaces F *correspondantes à des carènes complémentaires coïncident.* Cette propriété est évidente.

Les Surfaces C *sont inversement homothétiques relativement au centre du volume total.* Soient en effet v, v', les volumes des deux carènes et a, a', A, les centres des volumes des deux carènes et du flotteur; ces trois points sont en ligne droite et l'on a :

$$\frac{a'A}{aA} = \frac{v}{v'},$$

le rapport de ces deux lignes est donc constant.

Les courbes C *sont semblables.* — Il est clair, en effet, que les courbes a' et a de l'espace, correspondantes au même cylindre d'inclinaison, sont homothétiques relativement au point A; si l'on projette ces courbes et le point A sur le plan d'inclinaison, les courbes projetées seront encore homothétiques relativement à la projection du point A; les courbes C seront ainsi des courbes planes homothétiques relativement à un point de leur plan, elles seront donc semblables.