le travail nécessaire pour produire une vitesse donnée mesurée au loch, serait indépendant de la vitesse propre de la nappe d'eau dans laquelle flotte le navire. Ce principe, assurément exact en théorie, semble en désaccord avec les résultats de l'expérience ; cette contradiction a été mise en évidence par les expériences de Dubuat, mais elle n'est qu'apparente.

Les courants parfaitement horizontaux n'existent en effet nulle part dans la nature, la surface libre des cours d'eau présente, à vitesse égale, une pente d'autant plus grande, que les frottements du liquide sur les parois qui le renferment sont plus intenses ; de sorte que le navire qui remonte le courant doit non seulement refouler le liquide, mais encore s'élever sur la pente, et le travail nécessaire pour produire l'élévation de poids sur les rivières est loin d'être négligeable. Il en résulte donc que le navire, en remontant un cours d'eau, donnera, à égalité de travail développé, une vitesse au loch moindre qu'en eau tranquille et *à fortiori* qu'en descendant le courant. Cette particularité est bien connue des mécaniciens des bâtiments de rivière.

§ 3. — Translations transversale et oblique.

Dans la translation transversale et dans la translation oblique, la flottaison se meut encore parallèlement à elle-même dans son plan; mais, dans le premier cas, elle se meut perpendiculairement à l'axe longitudinal et, dans le second, obliquement à cet axe.

Translation transversale. — Il est évident que si les navires étaient symétriques relativement au plan transversal, ce mouvement donnerait lieu à des forces analogues à celles qu'engendre la translation directe ; on aurait, par conséquent, en négligeant comme précédemment les composantes verticales, une résultante unique, la *Résistance transversale,* qui serait appliquée sur la verticale milieu du plan longitudinal.

Les navires ne sont pas symétriques relativement au plan transversal, mais leurs formes N et R sont assez peu différentes pour que l'on puisse, dans la limite de précision que comportent ces questions, admettre qu'il en est encore ainsi.

On est donc conduit à admettre, par analogie, que le *Centre de la résistance transversale* est le centre de l'aire immergée du plan longitudinal et que l'intensité de cette force a pour expression :

$$K'A^2V^2$$

où A^2 représenterait l'aire immergée de la section longitudinale, et K' une constante beaucoup plus grande que celle qui convient à la résistance directe, car la proue et la poupe relatives à la translation transversale sont peu proéminantes et que l'on se trouve dans des conditions voisines de celles du plan mince.

La partie immergée de la section longitudinale s'appelle le *Plan de dérive,* et le centre de cette surface, le *Centre de dérive.*

Translation oblique. — Dans ce mouvement, les composantes horizontales des pressions hydrodynamiques donnent pour résultante une force horizontale, oblique sur le plan longitudinal, et traversant ce plan en un point que l'on considère comme le point d'application de la *Résistance oblique.*

Hypothèses usuelles. — Partant de ce principe que le mouvement de translation oblique du navire peut être considéré comme résultant de la composition de deux translations, l'une directe, l'autre transversale, on admet souvent que la résistance oblique est la résultante des deux résistances auxquelles ces mouvements donneraient lieu isolément.

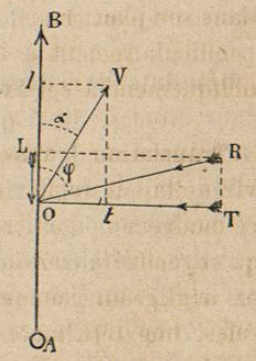

Fig. 79.

Se plaçant à ce point de vue (fig. 79), si l'on désigne par α la *Dérive,*

c'est-à-dire l'angle formé par l'axe AB du navire avec la direction OV de la vitesse, on a pour expression des composantes longitudinale et transversale de cette vitesse :

$$Ol = V \cos \alpha, \qquad Ot = V \sin \alpha.$$

Les résistances correspondantes sont, en appelant A^2 et B^2 les aires immergées du plan longitudinal et du maître couple, et K' et K'' les coefficients de résistance correspondants :

$$OL = K'B^2V^2 \cos^2 \alpha \qquad OT = K''A^2V^2 \sin^2 \alpha.$$

La résistance oblique aurait pour intensité la racine carrée de $\overline{OL}^2 + \overline{OT}^2$, et ferait avec OX un angle φ tel que :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{OT}{OL} = \frac{K''A^2}{K'B^2} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Enfin, le point d'application de cette force serait situé au point de rencontre de OL et OT, c'est-à-dire dans le plan longitudinal et au point que l'on est convenu d'appeler le centre de dérive.

Mais cette manière d'envisager la question est évidemment très défectueuse ; si, en effet, le mouvement du navire peut, au point de vue cinématique, être décomposé comme on vient de le dire, cette décomposition n'a plus aucun sens relativement au mouvement des filets liquides ; il ne faut donc pas s'étonner que les résultats de cette théorie soient en désaccord avec ceux de l'expérience.

Résultats de l'expérience. — Les expériences sur les plans minces, ainsi que l'analyse des effets des résistances des carènes sur le navire dans les évolutions, montrent que, lorsque le navire dérive en allant de l'avant, la résistance oblique est appliquée sur l'avant du milieu ; si, au contraire, le navire dérive en culant, le point d'application est situé sur l'arrière ; enfin, lorsque le navire dérive en travers, la résistance est appliquée sensiblement au milieu du navire.

D'un autre côté, la direction de la résistance est sensiblement celle de la transversale pour la translation transversale, et elle coïncide avec la direction de l'axe longitudinal pour les translations suivant cet axe ; on peut donc, en vertu de la continuité, admettre les principes suivants :

Dans la translation transversale, la résistance est une force transversale appliquée sensiblement au milieu du navire ; lorsque la direction de la vitesse se rapproche de l'avant ou de l'arrière, le point d'application de cette force se rapproche de positions limites situées respectivement en avant ou en arrière du milieu ; en même temps, la direction de la résistance se rapproche de celle de l'axe longitudinal. Enfin, l'expérience montre que, sauf aux limites extrêmes de la translation transversale et de la translation directe, où la direction de la force coïncide avec celle de la vitesse, la direction de la résistance est toujours comprise entre celle de la vitesse et la direction transversale.

Ces propriétés peuvent être résumées par une image très simple : imaginons, en effet, une ellipse ayant pour axes la

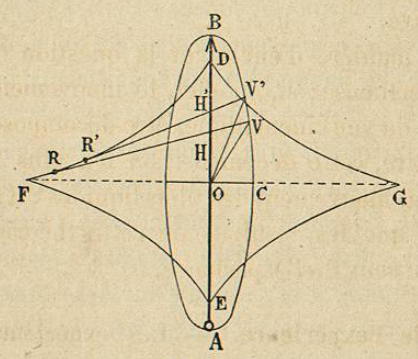

Fig. 80.

longueur et la largeur de la flottaison, c'est-à-dire l'ellipse circonscrite à la flottaison ; si l'on trace par le centre O une parallèle OV à la direction de la vitesse, en menant au point V une normale à l'ellipse, on obtient une droite qui traverse le plan longitudinal en un point H, qui rallie l'avant ou l'arrière en même temps que la direction OV ; en outre,

cette direction est toujours comprise entre la normale à l'axe AB et la direction OV, sauf aux cas des directions extrêmes OC, OB, OA, où elle coïncide avec celles-ci.

On pourrait même remarquer que la longueur VR du rayon de courbure en chaque point, varie comme les résistances correspondantes à une vitesse de même intensité, car cette longueur est maximum quand la vitesse est transversale, et minimum quand elle est longitudinale.

Enveloppe des résistances de translation. — Toutefois, il faudrait évidemment se garder de considérer ce que nous venons de dire comme l'expression d'une loi assez exacte pour fournir aux besoins de la pratique des résultats numériques ; il n'y faut voir qu'une image simple, résumant les propriétés qu'a révélées l'expérience, et permettant d'en conserver l'ensemble présent à l'esprit, dans l'étude des effets que peuvent produire ces résistances sur le navire en mouvement.

Nous admettrons donc dans la suite que les résistances de translation enveloppent une courbe FDGE, analogue à la développée d'une ellipse, présentant 4 points de rebroussement, et symétrique par rapport à l'axe longitudinal et à la transversale milieu.

Nous remarquerons que, dans le voisinage des points d'inflexion, pour des variations sensibles de la direction de la tangente, le point de contact avec l'enveloppe varie très peu; par suite, pour des vitesses voisines de la vitesse longitudinale, c'est-à-dire pour les *petites dérives*, le point d'application de la résistance est sensiblement fixe et situé aux points D et E; de même, pour les vitesses voisines de la transversale, nous pouvons admettre que la résistance reste appliquée aux points fixes F et G, mais lorsque nous voudrons envisager des vitesses très obliques, comme dans le halage à la cordelle, il faudra tenir compte de l'enveloppe entière des résistances.

Dans l'étude de la propulsion à la voile, où l'on n'a à considérer le plus souvent que de faibles dérives, les points de

rebroussement D et E jouent le rôle le plus important ; c'est à ces points que devrait être donné le nom de centres de dérive, donné arbitrairement, comme on l'a vu, au centre de l'aire immergée du plan longitudinal.

Positions des points D et E. — Les positions de ces points importants n'ont jamais été, à notre connaissance, recherchées expérimentalement; cependant, dans une expérience de remorquage et par une méthode qui constitue une application des principes exposés dans la théorie du halage à la cordelle, nous avons trouvé que, sur la chaloupe du *Borda* ($12^m,6$ de longueur), le point D était situé à $1^m,45$ sur l'avant du milieu. Ces points changent d'ailleurs de position quand l'assiette varie; il est clair, en effet, que, lorsque l'on augmente la différence de tirant d'eau, on augmente les surfaces résistantes de l'arrière et l'on diminue celles de l'avant; par conséquent, le point D recule, et que l'effet inverse se produit lorsque l'on met le navire sur nez ; c'est pour cette raison que les navires à la voile deviennent respectivement mous et ardents dans l'un et l'autre cas.

Variation de la direction de la résistance quand l'intensité de la vitesse varie. — Enfin, il nous reste à signaler une propriété qui explique pourquoi, lorsque la vitesse augmente, les navires à voiles deviennent ardents, et les navires remorqués obliquement divergent ; cette propriété consiste en ce que l'écart entre la direction de la vitesse et celle de la résistance augmente avec l'intensité de la vitesse ; ainsi, aux vitesses V et V′ de même direction, mais d'intensité inégale (V′ > V), correspondent des résistances R et R′ différentes; l'écart angulaire (V′ R′) est plus grand que l'écart angulaire (VR).

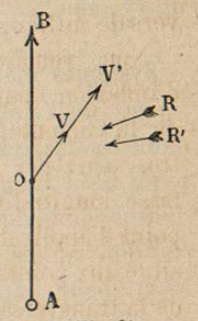

Fig. 81.

On peut conclure de ce résultat de l'expérience que, lorsque la vitesse augmente, la composante transversale de la résistance augmente un peu plus vite que la composante longitudinale.

§ 4. — Similitude mécanique des navires et des modèles en mouvement.

Équation générale du mouvement d'un système matériel. — Si l'on désigne par m la masse de l'un des points du système, par x, y, z, les coordonnées de ce point relativement à trois axes rectangulaires, par δx, δy, δz, trois déplacements compatibles avec les liaisons auxquelles ce point est assujetti, enfin par X, Y, Z, les sommes des composantes suivant les trois axes de coordonnées des forces qui sollicitent le point considéré, l'équation générale du mouvement du système est :

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0, \quad (1)$$

le signe Σ s'étendant à tous les points du système.

Il est clair que, pour tous les systèmes matériels pour lesquels les réactions des liaisons et les forces intérieures sont telles que la somme de leurs travaux pour tout déplacement compatible avec les liaisons soit nulle, ces forces disparaissent de l'équation (1); alors X, Y, Z sont les composantes des forces extérieures appliquées aux différents points du système.

Systèmes matériels semblables. — On dit que deux systèmes matériels, composés de points matériels indépendants les uns des autres, sont semblables, lorsqu'ils sont composés d'un même nombre de points matériels formant deux figures semblables, et que les masses des points homologues sont entre elles dans un rapport constant; il existe évidemment, pour l'un et l'autre système matériel, deux systèmes d'axes par rapport auxquels les coordonnées des points homologues sont proportionnelles, de sorte que l'on aura, en appelant x, y, z, et x', y', z' les coordonnées de deux points homologues, m et m' leurs masses, et enfin λ et μ deux nombres constants :

$$x'=\lambda x, \qquad y'=\lambda y, \qquad z'=\lambda z, \qquad m'=\mu m.$$

Mais lorsque les systèmes matériels considérés sont maintenus par des liaisons, ou que leurs parties réagissent les unes sur les autres, il faut en outre qu'il y ait *similitude des liaisons*, c'est-à-dire que les liaisons ne permettent à chaque système que les déformations pour lesquelles la similitude est conservée; on a alors pour tout déplacement δx, δy, δz d'un point du premier système, un déplacement $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ du point homologue du deuxième système, tel que :

$$\delta x'=\lambda\delta x, \qquad \delta y'=\lambda\delta y, \qquad \delta z'=\lambda\delta z.$$

Pour simplifier le langage, nous supposerons que les systèmes d'axes auxquels les deux systèmes sont rapportés sont parallèles; il est clair que les propriétés du mouvement sont indépendantes de la direction des axes; par conséquent, nous n'altérons pas ainsi la généralité du sujet.

Similitude cinématique. — Désignons par A et A′ les deux systèmes matériels considérés; supposons que, pour le système A et pour le système A′, on compte les temps t et t' à partir de deux instants auxquels il y avait similitude, et, qu'à deux époques quelconques, telles que :

$$t'=\theta t, \qquad (\theta \text{ constant}),$$

les deux systèmes soient toujours semblables et semblablement placés relativement à des axes fixes, nous dirons qu'alors il y a *similitude cinématique*.

Aux instants correspondants t et t', les vitesses et les accélérations des points homologues seront parallèles et dans un rapport constant; il suffit, en effet, pour cela que les composantes des vitesses et des accélérations suivant les trois axes soient proportionnelles; or, les coordonnées suivant OX et OX′ des points m et m' seront aux instants successifs t et $t+dt$, et t' et $t'+dt'$:

$$x \qquad x' \qquad\qquad x+dx \qquad x'+dx'$$

et l'on aura :

$$x' = \lambda x \qquad x' + dx' = \lambda(x + dx) \qquad \text{d'où} \qquad dx' = \lambda dx$$

mais de

$$t' = \theta t,$$

on tire

$$dt' = \theta dt;$$

on aura donc :

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\lambda}{\theta}\frac{dx}{dt};$$

on aurait de même :

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{\lambda}{\theta}\frac{dy}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{\lambda}{\theta}\frac{dz}{dt}.$$

En outre, aux instants dont il s'agit, les composantes des vitesses suivant OX et OX′ seront :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_x' = \frac{dx'}{dt'} \qquad v_x + dv_x \qquad v_x' + dv_x';$$

mais on vient de voir que l'on a :

$$v_x' = \frac{\lambda}{\theta} v_x \qquad (v_x' + dv_x') = \frac{\lambda}{\theta}(v_x + dv_x);$$

on en déduit :

$$dv'_x = \frac{\lambda}{\theta} dv_x \qquad \text{et} \qquad \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{\lambda}{\theta^2}\frac{dv_x}{dt}.$$

On verrait de même que l'on aura :

$$\frac{dv'_y}{dt} = \frac{\lambda}{\theta^2}\frac{dv_y}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dv'_z}{dt'} = \frac{\lambda}{\theta^2}\frac{dv_z}{dt}.$$

Les vitesses sont ainsi dans le rapport $\frac{\lambda}{\theta}$ et les accélérations dans le rapport $\frac{\lambda}{\theta^2}$.

Similitude mécanique. — Considérons un système matériel A, constitué de telle sorte que, pour tout déplacement compatible avec les liaisons, la somme des travaux des forces

intérieures et des réactions exercées par les liaisons soit nulle ; l'équation générale du mouvement de ce système sera, en désignant par X, Y et Z les composantes des *forces extérieures* appliquées aux différents points :

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0. \quad (1)$$

Imaginons actuellement un second système A′, tel qu'à deux instants correspondants t' et t, $t' = \theta t$, il y ait toujours similitude complète avec le système A ; l'équation du mouvement de ce système sera :

$$\Sigma\left[\left(X' - m'\frac{d^2x'}{dt'^2}\right)\delta x' + \left(Y' - m'\frac{d^2y'}{dt'^2}\right)\delta y' + \left(Z' - m'\frac{d^2z'}{dt'^2}\right)\delta z'\right] = 0, \quad (2)$$

et les forces X′, Y′, Z′... qui, à un instant t' quelconque, satisferont à la relation obtenue en remplaçant dans (2) les quantités $\frac{d^2x'^2}{dt'^2}$, $\frac{d^2y'^2}{dt'^2}$, et $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$... par leurs valeurs à cet instant donneront au système A′ le mouvement considéré.

Or, en vertu de la similitude, les valeurs de $\frac{d^2x'}{dt'^2}$.... à l'instant t', s'obtiendront en multipliant par $\frac{\lambda}{\theta^2}$ les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$.... à l'instant t ; d'un autre côté, en vertu de la similitude des liaisons on pourra remplacer $\delta x'$... par $\lambda\delta x$. Donc les forces X′, Y′, Z′.... qui, à l'instant t' satisferont à la relation obtenue en remplaçant dans l'équation (3), ci-après, les quantités $\frac{d^2x}{dt^2}$... et $\delta x'$.... par leurs valeurs à l'instant t, donneront au système A′ le mouvement considéré :

$$\Sigma\left[\left(X' - \mu m\frac{\lambda}{\theta^2}\frac{d^2x}{dt^2}\right)\lambda\delta x + \left(Y' - \mu m\frac{\lambda}{\theta^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\lambda\delta y + \left(Z' - \mu m\frac{\lambda}{\theta^2}\frac{d^2z}{dt^2}\right)\lambda\delta z\right] = 0. \quad (3)$$

Mais, si l'on remplace dans cette équation X′ par $\frac{\mu\lambda}{\theta^2}\cdot X$, Y′ par $\frac{\mu\lambda}{\theta^2}\cdot Y$...., X, Y et Z représentant les valeurs des forces qui agissent sur le système A à l'instant t, l'équation obtenue sera le résultat de la multiplication du premier membre de (1) par le facteur constant $\frac{\mu\lambda^2}{\theta^2}$, elle sera donc toujours vérifiée.

Par conséquent, pour *maintenir* le système A′ dans le mouvement considéré, il suffira d'appliquer aux instants t' à ses différents points des forces égales aux produits par $\frac{\mu\lambda}{\theta^2}$ de celles qui sollicitent aux instants t les points homologues du système A. Il résulte évidemment de là que si, à l'origine, les deux systèmes A et A′ sont en repos, on leur imprimera des mouvements semblables en leur appliquant respectivement ces forces.

Application à la résistance comparée des modèles et des navires. — Désignons par A le système formé par un modèle et l'eau sur laquelle il flotte, par A′ le système formé par un navire semblable λ fois plus grand et l'eau qui l'entoure; dans l'état de repos, ces deux systèmes peuvent être considérés comme semblables; les éléments liquides homologues ont en effet leurs masses proportionnelles aux cubes des dimensions, et l'on a :

$$\frac{m'}{m}=\mu=\lambda^3. \qquad (1)$$

Il y a entre les deux systèmes similitude de liaisons; il est clair, en effet, qu'à tout instant, lorsque les systèmes affecteront des formes semblables, les déformations permises par les liaisons seront semblables, à la condition de supposer le liquide incompressible.

Enfin, les forces intérieures disparaissent de l'équation du mouvement, car pour toute déformation compatible avec les liaisons, les travaux des forces intérieures sont nuls.

Voyons maintenant quel devra être le rapport des forces qu'il faudra appliquer directement aux deux systèmes pour qu'il y ait similitude dans le mouvement; indépendamment de ces forces, la pesanteur agit sur les molécules pendant le mouvement; or, les poids des molécules homologues sont entre eux dans le rapport λ^3, il faudra donc que les forces directement appliquées soient dans le même rapport, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\mu\frac{\lambda}{\theta^2}=\lambda^3 \qquad (2)$$

des relations (1) et (2) on déduit, pour le troisième coefficient θ, la valeur

$$\theta=\sqrt{\lambda}. \qquad (3)$$

Ainsi le coefficient des forces sera λ^3, celui des vitesses $\frac{\lambda}{\theta}=\sqrt{\lambda}$.

Supposons actuellement, pour fixer les idées, que les deux systèmes soient limités par des bassins semblables, et qu'à l'avant du navire et du modèle, on exerce des tractions horizontales respectivement égales à λ^3 F et à F, les forces qui agiront sur les systèmes seront :

1° Les forces F et λ^3F;

2° La pesanteur;

3° La pression atmosphérique;

4° Les pressions des parois des bassins, sur le liquide qui les mouille.

Les forces F et λ^3F, d'une part, et la pesanteur, de l'autre, sont des forces homologues dans le même rapport de similitude; la pression atmosphérique disparaît de l'équation générale parce qu'elle est constante sur toute la surface libre des systèmes, et que l'un et l'autre de ces systèmes ayant un volume constant, son travail est nul pour toute déformation compatible avec les liaisons; enfin, les travaux des pressions

des parois des bassins sont nuls, parce qu'elles sont normales aux mouvements que peuvent prendre les molécules qui les touchent.

Nous sommes donc exactement dans les conditions que nous avons admises pour établir le théorème; par conséquent, il y aura similitude cinématique pendant le mouvement, et les vitesses seront dans le rapport $\frac{v'}{v} = \sqrt{\lambda}$ aux instants homologues $t' = t\sqrt{\lambda}$, et quand les vitesses seront devenues constantes, elles seront toujours dans ce rapport.

Réciproquement. — Il est évident que, à des vitesses uniformes données du navire et du modèle, correspondent des résistances déterminées; si les vitesses correspondantes sont dans le rapport $\frac{v'}{v} = \sqrt{\lambda}$, les résistances seront dans le rapport $\frac{F'}{F} = \lambda^3$.

Si, en effet, il n'en était pas ainsi et qu'on eût $\frac{F'}{F} = \alpha^3$, il résulte de ce que nous venons de dire qu'on aurait $\frac{v'}{v} = \sqrt{\alpha}$, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

On voit ainsi que, pour déterminer la résistance F′ d'un navire à une vitesse v', il suffit de mesurer la résistance F′ d'un modèle λ fois plus petit, à la vitesse $\frac{v'}{\sqrt{\lambda}}$, car la valeur de F′ est égale à $F\lambda^3$.

Influence des frottements. — On remarquera, toutefois, que nous avons négligé l'influence des frottements; ces forces ne pourraient rentrer dans la loi de similitude, que si les surfaces des carènes semblables étaient choisies d'une manière spéciale. Il est impossible de préciser les natures des surfaces à employer pour qu'il en soit ainsi, malgré les expériences qui ont été faites à ce sujet; d'ordinaire on rend aussi lisses que possible les surfaces des modèles; mais il est

clair que si l'on atténue ainsi les erreurs qui proviennent des forces de cette nature, il est impossible de les détruire, de sorte que l'on ne peut accepter qu'avec de grandes réserves les résultats des expériences de traction des modèles.

M. Froude a cependant constaté dans ses expériences de traction du *Greyhound* et d'un modèle au seizième de ce navire, une analogie frappante des lames engendrées aux vitesses correspondantes.