LIVRE IV

DU NAVIRE SUR MER AGITÉE

CHAPITRE Ier

DE LA MER AGITÉE

§ 1. — Théorie de la houle.

Définition de la houle, son aspect. — Lorsque l'air est immobile depuis un certain temps, la mer est en équilibre; ses molécules sont immobiles et la surface libre est horizontale. Si la brise vient à se lever, le frottement de l'air entraîne les molécules superficielles, il se forme bientôt des rides légères, la brise continuant à souffler vient presser les flancs inclinés de ces petites vagues; celles-ci grandissent, s'allongent et deviennent des *lames;* enfin, il s'établit bientôt un état permanent qui dépend de l'intensité du vent.

Si maintenant, la mer étant agitée, la brise vient à cesser, le liquide ne revient à son état primitif de repos qu'après avoir passé par une période intermédiaire, dans laquelle ses molécules oscillent dans le voisinage de la position moyenne qu'elles prendront plus tard. Ce mouvement oscillatoire de la mer sans brise constitue le phénomène de *la houle.*

Aspect de la houle. — La surface de la mer, au lieu d'être plane, présente de longues ondes horizontales sensiblement rectilignes, qui semblent se mouvoir perpendiculairement à leurs génératrices. Malgré ce transport apparent des ondes,

on constate aisément que les molécules liquides ne changent pas sensiblement de lieu, c'est-à-dire que leurs trajectoires sont des courbes qui circulent autour d'une position moyenne.

Houle cylindrique et permanente. — La houle est dite *cylindrique* lorsque ses ondes ont sensiblement la forme de cannelures cylindriques à génératrice horizontale, et *permanente* lorsque la forme des ondes reste invariable pendant la propagation ; enfin, on dit que la houle est *simple* quand ses ondes successives ont la même forme. Nous supposerons, dans ce qui suit, que la houle considérée est cylindrique, simple et permanente.

Hypothèse d'un courant. — Ainsi que nous l'avons dit plus haut, bien que les ondes de la houle se propagent uniformément et normalement à leurs génératrices, les molécules circulent dans une région très restreinte; mais on sait que l'on peut, sans qu'il en résulte aucune altération pour les forces qui sollicitent les différentes parties d'un système matériel en mouvement, substituer au mouvement considéré celui qu'on obtiendrait en donnant aux différentes parties qui le composent une même vitesse rectiligne et uniforme quelconque. On peut donc substituer à l'étude du phénomène de la houle l'étude du mouvement qu'on obtiendrait en donnant à la masse liquide une vitesse égale et contraire au mouvement de propagation des ondes. Dans ce dernier mouvement, les ondes deviennent immobiles, et ce sont les molécules liquides qui, dans le courant dont elles sont animées, s'élèvent ou s'abaissent en parcourant leurs sinuosités.

On rencontre quelquefois ce genre de mouvement sur les grandes rivières, lorsque leur surface est agitée par une grande brise d'aval ; il arrive en effet parfois que la vitesse de propagation des ondes est égale à celle du courant, et l'observateur placé sur la rive ou sur un pont voit les molécules liquides ou plutôt les corpuscules qu'elles entraînent franchir successivement, en descendant le courant, les ondes immobles devant lui.

Cinématique de la houle. — Soit PQ le profil de la surface libre, c'est-à-dire son intersection par un plan perpendiculaire à la génératrice des ondes ; si l'on considère une molécule M dans son mouvement, on remarquera qu'elle décrit une sorte de canal étroit, et qu'en raison de la permanence, toutes les molécules qui passeront aux différents instants par la position M décriront le même trajet; leur ensemble remplira le canal dont nous venons de parler, et elles formeront un filet liquide de forme permanente, mais dans lequel la vitesse aux différents points pourra varier.

Fig. 120.

Toutes les molécules liquides décrivant des canaux analogues, la masse liquide entière pourra être considérée comme formée de tranches minces parallèles au plan de la figure, chaque tranche étant composée elle-même de filets liquides superposés et de forme permanente.

Horizontales dynamiques. — Les lignes qui limitent les filets liquides peuvent être considérées comme les trajectoires des centres de gravité de molécules infiniment petites; car si l'on considère un élément liquide de plus en plus petit, le filet correspondant deviendra de plus en plus étroit et, à la limite, ses deux bords se confondront entre eux et avec la trajectoire du centre de gravité de l'élément.

Il est clair qu'à chaque profondeur correspond une de ces lignes, et que deux lignes différentes ne peuvent se rencontrer en aucun point de la masse liquide, car en ce point le liquide serait animé de vitesses de directions différentes, ce qui est impossible.

On donne à ces lignes le nom d'*horizontales dynamiques*, ou

de *lignes d'égale profondeur* ; le profil de la surface libre est évidemment une de ces lignes. Les surfaces cylindriques dont ces lignes sont les profils se nomment *surfaces d'égale profondeur*.

Verticales dynamiques. — Considérons sur la figure 120 une bande verticale très étroite correspondant à la crête d'une onde ; les molécules qui remplissent cette bande glisseront dans leurs canaux respectifs avec des vitesses différentes, de sorte que la bande considérée affectera des formes diverses pendant qu'elle parcourt l'intervalle de deux crêtes, et elle reprendra à la crête suivante sa position première.

Si l'on suppose que cette bande devienne de plus en plus étroite, on obtiendra à la limite une ligne qui, droite et verticale quand elle passe sous les crêtes, s'infléchit tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, pendant qu'elle parcourt l'intervalle d'une onde ; on donne le nom de *verticales dynamiques* aux lignes que nous venons de définir.

Variations de la forme des molécules liquides pendant le mouvement. — Le mouvement du liquide étant permanent dans chaque filet, la vitesse en chacun des points de celui-ci doit être inversement proportionnelle à la section. Désignons par $d\sigma$ la longueur d'une molécule en un point quelconque

Fig. 121

du filet (fig. 121), par $d\tau$ l'épaisseur du filet mesurée normalement, et enfin par V la vitesse en ce point, on aura, ainsi que nous venons de le dire, en appelant K une constante quelconque,

$$V = K \cdot \frac{1}{d\tau};$$

mais le volume d'une molécule étant constant à cause de l'incompressibilité de l'eau, on a, en appelant K′ une autre constante,

$$d\sigma\, d\tau = K'.$$

On déduit de ces deux relations :

$$d\sigma = \frac{K'}{K} \cdot V.$$

La longueur d'une même molécule est donc proportionnelle à sa vitesse aux différents points de son parcours ; et l'on voit que s'il était possible de dessiner dans la section droite de la houle les limites d'un filet liquide et de colorer une des molécules que contient ce filet, on verrait cette molécule s'allonger ou se raccourcir et indiquer ainsi les variations de sa vitesse par ses variations de longueur.

Dynamique de la houle. — *Définitions.* — Imaginons en un point quelconque de la masse une surface de dimensions finies ; soit P la pression totale que subit ce plan sur l'une de ses faces, et S sa surface ; la pression moyenne par unité de surface de ce plan sera $\frac{P}{S}$, et on sait que l'on nomme *Pression* au point considéré de la masse liquide la limite vers laquelle tend ce rapport quand la surface plane considérée diminue indéfiniment. On sait enfin que, en un point quelconque d'un liquide en repos ou en mouvement, la pression est la même dans tous les sens. (Principe de Pascal.)

On désigne sous le nom de *Poussée* la résultante des pressions que le liquide exerce sur la surface extérieure d'un corps immergé ou d'une portion quelconque du liquide lui-même.

Enfin, dans une masse liquide en repos ou en mouvement, on appelle *Surface de niveau* toute surface idéale tracée dans le liquide par des points où la pression est la même ; il est clair que la surface libre des liquides en mouvement est une surface de niveau, puisqu'elle est soumise en tous ses points à la pression atmosphérique.

Postulatum sur lequel est fondée la théorie de la houle. — On admet que les *Surfaces de niveau* dans la houle coïncident avec les *Surfaces d'égale profondeur* définies plus haut. Cette

hypothèse est très vraisemblable ; la surface libre appartient en effet déjà à l'un et à l'autre système ; en second lieu, les surfaces de niveau, comme les surfaces d'égale profondeur, ne peuvent se couper en aucun point de la masse, parce qu'à ce point correspondraient deux pressions différentes, ce qui est contraire au principe de Pascal ; enfin on peut encore remarquer que, si l'on admet que, dans la houle, le mouvement ondulatoire s'éteigne à mesure que la profondeur augmente, à la limite les surfaces d'égale profondeur seront horizontales, et, comme le liquide sera alors animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, les surfaces de niveau seront elles-mêmes horizontales et coïncideront avec les précédentes.

Les lignes d'égale profondeur sont des trochoïdes. — Considérons un filet liquide quelconque de la masse (fig. 122) et dans le filet une molécule ; soient p et $p + dp$ les pressions par unité de surface correspondantes aux deux surfaces de niveau entre lesquelles le filet est compris ; sur les surfaces latérales de la molécule les pressions seront égales et opposées, et la poussée sera la résultante des pressions subies par les faces supérieures et inférieures.

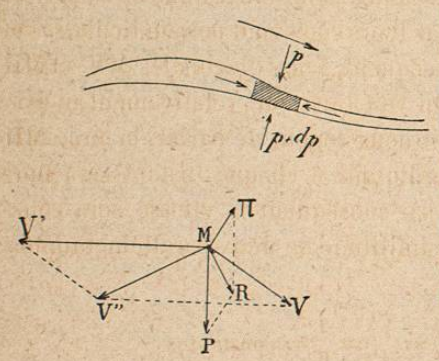

Fig. 122.

Les seules forces extérieures appliquées à la molécule étant son poids P et sa poussée π, son centre de gravité se mouvra sous l'influence de la résultante de ces deux forces ; or, le poids P est constant et dirigé de haut en bas, la poussée π est toujours normale à la courbe et son intensité est :

$$(p + dp)\, d\sigma - p d\sigma = dp \cdot d\sigma$$

et comme $d\sigma$ est proportionnel à la vitesse et que dp est

constant pendant le mouvement, on aura en appelant K une constante :

$$\pi = K \cdot V.$$

Supposons actuellement que l'on rapporte le mouvement à des axes animés d'un mouvement rectiligne horizontal et uniforme, et dont la vitesse V′ soit telle que l'on ait :

$$\frac{V'}{P} = \frac{V}{\pi} = \frac{1}{K} \qquad \text{ou} \qquad P = K \cdot V'.$$

La vitesse de la molécule relativement à ces axes sera la résultante de V, et d'une vitesse MV′ égale et contraire à celle des axes ; mais les deux parallélogrammes V′ MV et PMπ sont semblables, car leurs côtés sont perpendiculaires et proportionnels ; par conséquent, leurs diagonales MV″ et MR sont perpendiculaires. On voit ainsi que, relativement au système d'axes mobiles dont nous venons de parler, la force MR qui sollicite la molécule liquide à chaque instant sera normale à la vitesse MV″, par conséquent la vitesse sera constante. D'ailleurs, de la similitude de deux parallélogrammes on déduit :

$$\frac{MV''}{MR} = \frac{MV'}{MP} = \frac{V'}{P} = \frac{1}{K} = \text{constante} ;$$

or, on vient de voir que MV″ était constante, il en sera donc de même de MR.

La force MR sera donc constante et à tout instant normale à la vitesse, par conséquent la molécule décrira un cercle d'un mouvement uniforme.

La molécule décrivant un cercle d'un mouvement uniforme par rapport au système d'axes que nous venons d'indiquer, elle décrira, relativement au système d'axes primitif, une *trochoïde*, c'est-à-dire une des courbes engendrées par un point qui tourne d'un mouvement uniforme sur un cercle dont le centre se meut lui-même uniformément et en ligne droite.

Caractères de la trochoïde. — Lorsqu'un point M (fig. 133) se meut sur un cercle avec une vitesse angulaire ε, il décrit le cercle dans un intervalle égal à $\frac{2\pi}{\varepsilon}$. Si le centre O du cercle se meut avec une vitesse a, il parcourra pendant le même intervalle la distance $OO' = \frac{2\pi a}{\varepsilon}$. Il est clair que, dans

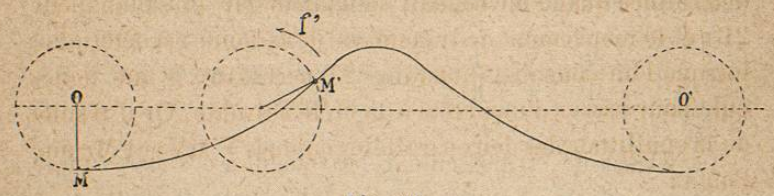

Fig. 123.

ce mouvement, le point M décrira une courbe formée d'ondes successives égales entre elles, et, si l'on désigne par 2L la distance de deux crêtes, et par 2T l'intervalle nécessaire pour que la molécule passe d'une crête à une autre, on aura :

$$2T = \frac{2\varpi}{\varepsilon}, \qquad 2L = \frac{2\varpi a}{\varepsilon},$$

ou

$$T = \frac{\varpi}{\varepsilon}, \quad (1) \qquad\qquad L = \frac{\varpi a}{\varepsilon}. \quad (2)$$

La vitesse du point générateur, aux sommets des ondes, sera égale à l'excès de la vitesse a sur la vitesse du point sur son cercle, c'est-à-dire, en appelant R le rayon du cercle,

$$a - R\varepsilon,$$

si cette vitesse était nulle, la trochoïde deviendrait une cycloïde et présenterait à ses crêtes des points de rebroussement; si elle devenait négative, la courbe serait bouclée à ses sommets ; or, cette vitesse est précisément celle des molécules liquides sur les crêtes dans la houle avec courant et l'on a vu que l'épaisseur du filet liquide en chaque point lui était inversement proportionnelle ; si donc la vitesse de-

venait nulle aux sommets, l'épaisseur des filets deviendrait infinie, ce qui est absurde ; on voit donc que l'on doit avoir nécessairement[1] :

$$a > R\varepsilon, \text{ c'est-à-dire : } \quad R < \frac{a}{\varepsilon}. \qquad (3)$$

Paramètres de la houle. — La forme d'une trochoïde est déterminée quand on connaît sa hauteur 2R, et sa longueur 2L; et le mouvement de translation de la houle est déterminé lorsque l'on connaît l'intervalle 2T nécessaire à une molécule pour passer d'une crête à la crête suivante. Or il résulte de la similitude des deux parallélogrammes V'MV et PMπ que l'on a :

$$\frac{MV'}{MP} = \frac{MV''}{MR}.$$

Mais MV' est la vitesse du centre du cercle générateur, c'est-à-dire a, MV'' est la vitesse de la molécule sur son cercle, c'est-à-dire εR, MR est le produit de la masse par l'accélération centrifuge, c'est-à-dire $m\varepsilon^2$R, enfin MP $= mg$; on a donc :

$$\frac{a}{mg} = \frac{\varepsilon R}{m\varepsilon^2 R},$$

ou

$$a\varepsilon = g \qquad (4)$$

remplaçant dans cette formule ε et a par leurs valeurs tirées de (1) et (2) en fonction de T et L, c'est-à-dire par

$$\varepsilon = \frac{\varpi}{T}, \qquad a = \varepsilon\frac{L}{\varpi} = \frac{L}{T} \qquad (5)$$

on aura :

$$\frac{\varpi L}{T^2} = g,$$

ou

$$T = \sqrt{\frac{\varpi L}{g}}. \qquad (6)$$

1. Les houles naturelles sont très loin d'approcher de cette limite qui correspondrait à L $= \varpi$ R, c'est-à-dire à une vague dont la longueur serait le triple de la hauteur. Mais, quand la brise souffle, les lames sont plus escarpées, leurs crêtes s'élèvent; la masse d'eau qui forme ces crêtes devient de moins en moins stable; elle se désagrège sous l'influence de la pression de l'air en mouvement et vient se répandre en écume sur le versant de la lame sous le vent.

On voit que la longueur 2L de la houle et la durée 2T nécessaire pour qu'une molécule passe d'une crête à une autre, sont fonctions l'une de l'autre.

Diminution du mouvement avec la profondeur. — Nous avons vu plus haut que l'épaisseur $d\tau$ d'un filet en chaque point était inversement proportionnelle à la vitesse de la molécule liquide; d'un autre côté, la vitesse de la molécule sur les crêtes est égale à $a - \varepsilon R$ et dans les creux à $a + \varepsilon R$, il en résulte que les deux trochoïdes successives qui limitent le filet, sont plus rapprochées vers les creux que vers les crêtes, par conséquent ces deux courbes, quoiqu'ayant même longueur, ont des hauteurs différentes.

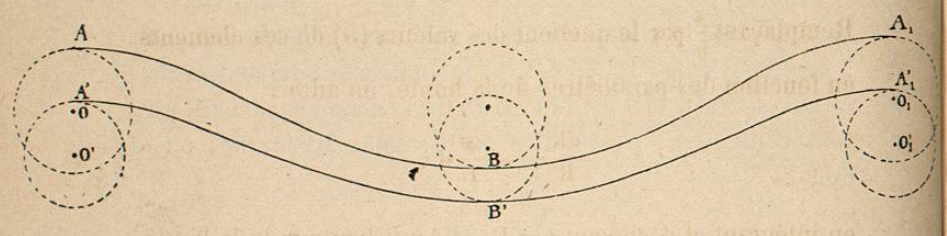

Fig. 124.

Désignons par R et R — dR les rayons des cercles générateurs des deux courbes (fig. 124), par z et $z + dz$ les profondeurs auxquelles sont situés leurs centres O et O′ au-dessous d'un plan horizontal quelconque. Les distances des sommets A et A′ à ce plan seront respectivement

$$z - R \qquad \text{et} \qquad z + dz - (R - dR),$$

et l'épaisseur du filet à la crête sera

$$dz + dR\,;$$

de même l'épaisseur du filet dans le creux sera :

$$-(z + R) + \left[(z + dz) + (R - dR)\right] = -dR + dz.$$

Écrivant que ces épaisseurs sont inversement proportionnelles aux vitesses, on obtient, en valeur absolue

$$\frac{dz + dR}{-dR + dz} = \frac{a + \varepsilon R}{a - \varepsilon R},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1 + \frac{dR}{dz}}{1 - \frac{dR}{dz}} = \frac{1 + \frac{\varepsilon}{a} R}{1 - \frac{\varepsilon}{a} R},$$

et par conséquent enfin, en remarquant dR et dz sont de signes contraires :

$$\frac{dR}{dz} = -\frac{\varepsilon}{a} R.$$

Remplaçant $\frac{\varepsilon}{a}$ par le quotient des valeurs (5) de ces éléments en fonction des paramètres de la houle, on aura :

$$\frac{dR}{R} = -\frac{\varpi}{L} dz\,;$$

en intégrant et désignant par R_0 la demi-hauteur de la houle à la surface, on aura en comptant les z à partir de l'horizontale menée par les centres des cercles superficiels :

$$\text{log. nép. } R - \text{log. nép. } R_0 = -\frac{\varpi}{L} z$$

ou enfin :

$$R = R_0 e^{\frac{-\varpi z}{L}}, \qquad (e = 2.71828).$$

On voit ainsi que la hauteur 2R des ondes diminue quand la profondeur z augmente et qu'elle devient nulle pour $z = \infty$.

De la houle sans courant. — Nous avons supposé jusqu'ici que toute la masse liquide était animée d'un courant tel que les formes des ondes restaient immobiles, et que les molécules liquides suivaient leurs profils ; la théorie qui précède reste applicable au cas où l'on donnerait à cette masse un