mouvement uniforme quelconque. Si l'on donne une vitesse égale et contraire à celle dont les cercles générateurs des ondes sont animés, les trajectoires des molécules deviendront des cercles, et l'on se trouvera en présence du vrai phénomène de la houle, dans lequel les ondes se propagent uniformément, soulevant et abaissant sur leur passage les molécules liquides, qui décrivent des cercles d'un mouvement uniforme et oscillent ainsi autour d'une position moyenne.

Mouvement des filets horizontaux. — Les filets compris entre deux trochoïdes qui, dans le mouvement envisagé précédemment, étaient immobiles, seront animés d'un mouvement ondulatoire (fig. 125) offrant quelque analogie avec celui d'une corde à l'une des extrémités de laquelle on imprime une vive secousse ; les molécules liquides comprises dans ce filet se raccourcissent en épaississant au passage des crêtes des ondes et s'allongent en s'amincissant au passage des creux comme l'indique la figure.

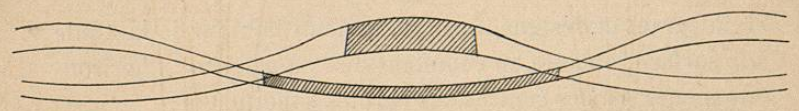

Fig. 125.

Mouvement des verticales dynamiques. — Considérons (fig. 126) les molécules dont les orbites ont leurs centres sur une même verticale ; à l'instant du passage d'une crête les rayons des orbites sont verticaux et le lieu géométrique des molécules est une verticale ; pendant que l'onde se propage, les rayons tournent en restant parallèles, et la file de molécules prend les formes successives indiquées par la figure. On remarquera que, relativement à un système d'axes dans lequel oz serait fixe et où ox serait à chaque dirigée suivant le rayon orbitaire de la molécule superficielle, les coordonnées d'une molécule quelconque seraient précisément le rayon de son orbite et la profondeur de son centre, de sorte que

l'équation des verticales dynamiques, relativement à ces axes variables, est :

$$x = R_0 e^{-\frac{\varpi z}{L}}.$$

En traçant les formes affectées aux divers instants par deux

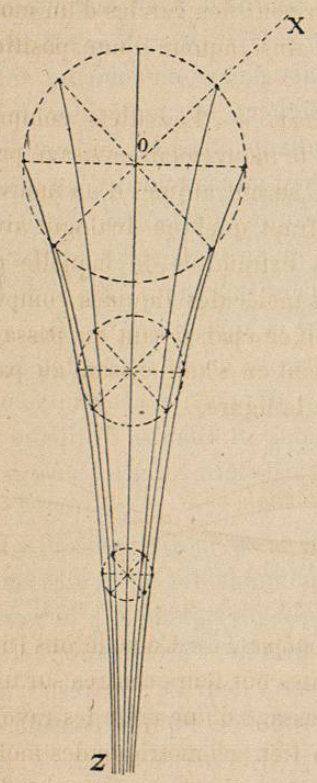

Fig. 126.

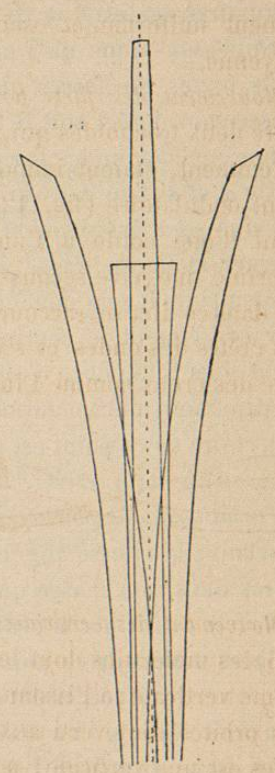

Fig. 127.

verticales dynamiques voisines (fig. 127), on obtient les différentes positions d'une bande verticale dynamique pendant le passage d'une onde.

Mouvement du centre de gravité d'une masse liquide quelconque. — On sait que le centre de gravité d'un système maté-

riel se meut comme si toutes les forces qui sollicitent les divers éléments du système lui étaient appliquées et que la masse totale fût concentrée en ce point.

Or, dans la houle, toutes les molécules liquides décrivent des cercles d'un mouvement uniforme et avec des vitesses angulaires égales, les forces qui les sollicitent sont donc constantes et leurs directions tournent avec des vitesses angulaires égales.

Supposons donc qu'à un instant donné on compose entre elles toutes les forces qui sollicitent les molécules de la masse considérée, soit R la résultante obtenue ; au bout d'un temps quelconque les forces auront toutes tourné d'un même angle α et si l'on fait de nouveau la composition, la figure obtenue sera évidemment celle qu'on obtiendrait en faisant tourner la figure tracée à l'instant précédent d'un angle α, la résultante R sera donc la même et aura tourné de l'angle α. Par conséquent le centre de gravité de la masse totale se meut sous l'influence d'une force d'intensité constante dont la direction tourne uniformément, et comme d'ailleurs la trajectoire de ce point est une courbe fermée, *cette courbe sera nécessairement un cercle* [1].

Variations de la poussée sur une même masse liquide. — En appelant ε la vitesse angulaire commune des molécules comprises dans une masse quelconque du liquide et ρ le rayon du cercle décrit par le centre de gravité, l'accélération totale du mouvement de ce point a pour valeur $\varepsilon^2\rho$; la résultante des forces qui sollicitent la portion de liquide considérée sera donc $M\varepsilon^2\rho$, si l'on désigne par M la masse totale.

La force $R = M\varepsilon^2\rho$ est évidemment la résultante de la poussée π et du poids P (fig. 128), puisque ces forces sont

1. Cette démonstration est extraite d'un mémoire sur la houle publié dans la *Revue maritime* en 1877 ; on peut arriver au même résultat en remarquant que, si l'on compose entre elles des droites parallèles aux vitesses des molécules et proportionnelles aux produits *mv* de la masse de chacune d'elles par sa vitesse, on obtient une droite parallèle à la vitesse V du centre de gravité et proportionnelle à MV, et que, par conséquent, V est constante et tourne uniformément.

les seules qui sollicitent la masse ; on obtiendra donc la poussée π en composant la force R avec une force — P égale et contraire au poids P. Prolongeons $G\pi$ jusqu'en A, les triangles semblables GAO et $G\pi R$ donnent :

$$\frac{OA}{R\pi} = \frac{GO}{GR};$$

mais $R\pi = P = Mg$, $GO = \rho$, et $GR = M\varepsilon^2\rho$, on aura donc :

$$OA = \frac{g}{\varepsilon^2}.$$

On voit que OA est constant, et que par conséquent la poussée passe par un point fixe de la verticale du centre O de l'orbite ; de plus, cette poussée est proportionnelle à la longueur GA, car on a :

$$\frac{G\pi}{GA} = \frac{GR}{GO} = \frac{\varepsilon^2\rho}{\rho} = \varepsilon^2.$$

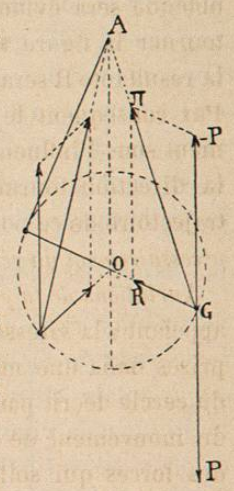

Fig. 128.

Remarque. — Les deux principes généraux que nous venons d'établir conviennent au cas d'une portion quelconque de liquide, infiniment petite ou finie, et composée d'autant de portions isolées qu'on le voudra.

Variations de la poussée sur un flotteur. — Si, comme on le fait d'ordinaire, on admet que la poussée sur un flotteur suffisamment petit relativement aux ondes, est la même que celle que subirait la masse liquide dont il occupe la place, on voit que la poussée que l'eau exerce sur le flotteur est maximum dans les creux des ondes et minimum sur les crêtes ; nous verrons plus loin que M. le contre-amiral Mottez a pu conclure de cette remarque que les navires sont moins stables sur les crêtes des lames que dans les creux.

§ 2. — Données expérimentales sur les vagues.

Les résultats les plus complets que l'on possède sur les dimensions et les vitesses des lames sont ceux qui ont été recueillis par le lieutenant de vaisseau Armand Paris, à bord du *Dupleix* et de la *Minerve* en 1867-1870, et qui ont été publiés par la *Revue maritime*, 1871, tome XXXI, page 111.

Nous donnons ci-dessous quelques extraits de cet important mémoire.

Procédés d'observations. — M. A. Paris a employé pour mesurer la longueur et la vitesse des lames, une méthode analogue à celle que Scoresby employa sur le *Royal Charter*. On note avec une montre à secondes l'intervalle t que met la crête d'une lame à parcourir la longueur l du navire qui sert ainsi de base. Si l'on appelle ensuite v la vitesse du navire obtenue au loch et φ l'angle aigu formé par la direction de la quille avec celle de la vitesse de propagation des ondes, on obtient la *vitesse apparente* par la formule $\frac{l}{t}\cos\varphi$, et la *vitesse vraie* en ajoutant ou retranchant $v\cos\varphi$ suivant que la lame vient de la hanche ou du bossoir du navire. La longueur totale 2L de la lame de crête en crête s'obtient en multipliant la vitesse apparente par l'intervalle des passages de deux crêtes successives au même point du navire.

On peut encore mesurer directement la longueur et la vitesse des lames à l'aide d'une ligne de loch filée derrière ; on file le bateau de loch jusqu'à ce que la *houache* se trouve sur une crête au moment où l'arrière du navire est lui-même sur la crête suivante, et on note l'intervalle que met une crête pour parcourir une longueur donnée de la ligne de loch. La longueur 2L est égale au produit par $\cos\varphi$ de la distance obtenue de crête en crête ; la vitesse s'obtient par la même formule que précédemment, puisque, dans cette nouvelle méthode, on ne fait que substituer deux points de la ligne de loch aux deux extrémités du navire.

Pour obtenir la hauteur, il suffit de se placer à bord à une élévation telle que, lorsque le navire est dans le creux de la lame, on aperçoive le sommet d'une lame par l'horizon ; la hauteur de l'œil au-dessus de la flottaison représente alors assez exactement celle de la vague ; il est bon, lorsque le navire a de grands roulis, d'observer au moment où le navire est droit.

Dans certains cas, il est difficile d'avoir des appréciations satisfaisantes ; ce sont ceux où la houle se croise en plusieurs sens ; la mer est irrégulière et tourmentée, et il faut beaucoup d'attention pour démêler les divers systèmes d'ondulations.

Résultats des observations. — Les résultats qui suivent sont déduits de l'observation d'environ 4,000 lames. Ils contiennent avec les dimensions et la période des lames la vitesse du vent régnant ; les vitesses sont données en mètres par seconde ; d'après M. Paris, elles correspondent de la manière suivante aux appellations ordinaires :

VITESSES du vent.	APPELLATIONS ordinaires.
0	Calme.
0.8	Presque calme.
1.8	Faible brise.
3.4	Légère —
6.0	Petite —
9.2	Jolie —
13.1	Bonne —
18.2	Vent frais.
23.6	— grand frais.
30.1	Coup de vent.
38.2	Tempête.
46.0	Ouragan.

Ces vitesses ont été obtenues à l'aide d'un anémomètre à ressort imaginé à cet effet par l'observateur, et dont les pressions avaient été étalonnées comparativement aux vitesses dans des expériences faites au mouillage.

Nous avons ajouté une dernière colonne contenant la valeur calculée 2T de la période, pour les lames moyennes, c'est-à-dire de l'intervalle des passages calculé par la formule :

$$T = \sqrt{\frac{\pi L}{g}} = 0{,}565\sqrt{L}.$$

ÉTAT de la mer.	VITESSES DU VENT.	2H HAUTEURS de crête en creux.			2L LONGUEURS de crête en crête.			V VITESSES en mètres par seconde.			2T INTERVALLES des passages de crêtes en secondes.			RAPPORT $\frac{L}{H}$ ou escarpement des lames.			VALEURS CALCULÉES DE 2T pour les lames moyennes.
		Moyenne.	Maximum.	Minimum.	Moyenne.	Maximum.	Minimum.	Moyenne.	Maximum.	Minimum.	Moyenne.	Maximum.	Minimum.	Moyenne.	Maximum.	Minimum.	
Très grosse mer	28.5	7.7	11.5	6,5	148	180	100	17.2	19.0	15.0	8.6	10.3	6.7	19	22	15	9".5
Grosse mer . .	20	5.0	7.5	3.5	105	137	65	14.0	16.7	10.0	7.6	10.3	3.6	21	23	15	7 .9
Mer dure, clapoteuse . . .	13.4	3.5	6.5	2.3	77	100	44	12.5	15.1	9.0	6.2	13.2	3.6	22	30	13	6 .8
Grosse houle. .	9.2	4.1	7.0	3.0	120	235	62	13.8	15.5	10.0	8.7	17.4	6.3	29	49	18	8 .5
Houle.	5.9	2.4	4.5	1.0	78	160	38	11.9	17.0	6.8	6.5	15.3	2.4	32	63	15	6 .8
Belle mer . . .	5.7	1.6	4.0	0.8	62	150	32	10.8	13.1	8.0	5.7	7.3	3.3	39	80	22	6 .1

On remarquera que les intervalles 2T calculés avec la longueur moyenne sont un peu plus grands que les valeurs moyennes des intervalles observés, cette particularité s'explique aisément par ce fait que la houle de longueur moyenne n'a pas pour période la période moyenne ; si, en effet, l'on désigne par T_1, T_2,... T_n, et par L_1,... L_2, L_n, les éléments correspondants déduits de l'observation directe, on a :

$$T_1 = 0{,}565\sqrt{L_1} \quad T_2 = 0{,}565\sqrt{L_2}\cdots \quad T_n = 0{,}565\sqrt{L_n}$$

de sorte que la durée moyenne inscrite par l'observateur a pour valeur :

$$T_m = \frac{1}{n}(T_1 + T_2 \cdots + T_n) = 0{,}565\frac{1}{n}(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} \cdots + \sqrt{L_n})$$

d'un autre côté, la demi-longueur moyenne inscrite est :

$$\frac{1}{n}(L_1 + L_2 + \cdots L_n),$$

par conséquent, le temps calculé avec cet élément dans la dernière colonne, est :

$$T_m' = 0{,}565\sqrt{\frac{L_1 + L_2 + \cdots L_n}{n}}$$

et ce nombre est, en général, différent du premier ; en réalité il faudrait, dans des observations de ce genre, prendre pour longueur moyenne la longueur L donnée par la formule :

$$\sqrt{L} = \frac{1}{n}(\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} \cdots + \sqrt{L_n}).$$

Hauteurs des lames. — Dans la région qui s'étend au sud des calmes du Capricorne, les vents d'ouest violents et presque continuels peuvent exercer leur action sans obstacle pendant des milliers de lieues ; aussi est-ce dans ces parages que l'on rencontre les plus grandes vagues. « C'est entre le « Cap et les îles Saint-Paul et Amsterdam que j'ai observé « les plus hautes ondulations, le 25 octobre 1867, par un « coup de vent de N.-O. avec de violents grains de neige. « Ce jour-là j'observai une moyenne de 9 mètres sur une « trentaine de lames à différents moments de la journée, et « la plus grande fut de $11^m,5$. Je vis six lames de cette di- « mension se succédant avec une régularité admirable et « enlevant la corvette comme une baleinière. Leur vitesse « était énorme et, après avoir soulevé le navire au milieu de « l'écume, elles le replongeaient dans une vallée d'une enca- « blure de large et qu'on voyait se prolonger au loin...

« La hauteur croît assez rapidement à mesure que le vent

« augmente ; elle dépend beaucoup de l'espace qu'a la mer « pour se former ; au large, lorsqu'il se lève une forte brise, « elle atteint facilement 5 mètres ; dans les mers étroites et « peu profondes, comme la Manche, la mer de Chine, il est « rare de les voir atteindre 6 mètres. C'est de tous les élé- « ments de la lame celui qui diminue et tombe le plus rapi- « dement après que la brise a cessé. »

Longueur de la lame. — « La longueur de la lame est fort « variable et change quelquefois du simple au triple entre « deux vagues consécutives. Lorsque le vent se fait, elle est « d'abord peu considérable, puis elle s'accroît plus rapide- « ment que la hauteur et pendant plusieurs jours le rapport « de ces deux quantités augmente, en sorte que la mer est « relativement plus creuse au commencement du coup de « vent qu'à la fin, la brise restant à peu près constante. Ainsi « dans l'Est du cap de Bonne-Espérance, par de grands vents « d'Ouest qui durèrent quatre jours avec beaucoup de régu- « larité, on vit la hauteur passer seulement de 6 à 7 mètres, « tandis que la longueur, qui n'était que de 113 mètres le « premier jour, en atteignit 235 le quatrième. C'est la plus « grande longueur *moyenne* que j'aie observée ; mais ce jour- « là même il y avait plusieurs vagues qui dépassaient 400 mè- « tres de crête en crête, et il n'est pas très rare d'en voir qui « individuellement atteignent 300 mètres. »

L'examen du tableau qui précède montre que la relation $T = 0{,}565\sqrt{L}$, fournie par la théorie, est sensiblement vérifiée dans la réalité ; mais on ne possède aucune donnée théorique sur la relation qui existe entre la hauteur 2H des lames et la vitesse du vent ; diverses formules empiriques ont été proposées ; la hauteur serait, d'après l'amiral Coupvent, proportionnelle à la puissance un tiers de la vitesse du vent, d'après M. le capitaine de vaisseau de Cuverville à la puissance un demi, enfin d'après M. Ch. Antoine, ingénieur de la marine, à la puissance un quart ; il est évident que la divergence de ces formules provient de ce que chacun de leurs auteurs disposait d'un nombre insuffisant d'observations.

Depuis quelques années, les bâtiments de l'État ont reçu la mission de recueillir des données sur les lames dans toutes les mers ; quelques-unes de ces observations ont été publiées par M. Ch. Antoine en 1876 ; on trouve également au *Mémorial du génie maritime, 1879,* les observations faites sur le *La Clocheterie*, par M. Revertegat, lieutenant de vaisseau ; mais des observations de cette nature n'offrent d'intérêt que lorsqu'elles sont en très grand nombre, et il serait à désirer que l'ensemble de toutes celles qui ont été faites jusqu'ici fût publié.

Vitesses propres des molécules liquides. — A l'aide des observations fournies par M. Paris, on peut calculer les vitesses propres des molécules liquides, en admettant que, comme dans la houle théorique, ces molécules décrivent des cercles d'un mouvement uniforme. On a en effet dans cette hypothèse :

$$V = \frac{2\varpi H}{2T}$$

en appliquant cette formule aux chiffres du tableau ci-dessus, on trouve que ces vitesses peuvent atteindre 5 à 6 nœuds ; elles sont dirigées dans le sens de la propagation des lames sur les crêtes et en sens contraire dans les creux. On voit ainsi qu'un navire qui fuit vent arrière, avec une vitesse de 10 nœuds, rencontre dans les creux des lames des filets liquides dont les vitesses relatives peuvent atteindre 16 nœuds ; il est probable même que par gros temps ces vitesses sont plus considérables encore, il est clair en effet que, sur les crêtes, l'eau est poussée par la brise et a une vitesse plus grande que sur des lames de houle de mêmes dimensions. Il est vraisemblable que dans les creux l'eau prend une vitesse en sens contraire qui la ramène dans le voisinage de sa position primitive ; cependant tout en étant plus grande que dans la houle, cette vitesse de retour reste inférieure à la vitesse directe, de sorte que les molécules superficielles

conservent une vitesse générale dans le sens de la propagation des lames.

Nous avons signalé, à propos des gouvernails compensés, l'importance attribuée par M. le contre-amiral Mottez aux effets de ces vitesses propres des molécules liquides sur le gouvernail du navire qui fuit devant le temps.

CHAPITRE II

DU ROULIS ET DU TANGAGE

Direction de la poussée dans les liquides en mouvement. — Nous avons montré que, dans la houle, la poussée subie par les molécules superficielles était normale à la surface libre ; cette propriété n'est pas particulière au phénomène de la houle, elle s'applique aux liquides animés de mouvements quelconques.

Si l'on considère en effet, dans le liquide agité (fig. 122), une molécule comprise entre deux surfaces de niveau infiniment voisines, on voit que les pressions exercées sur les parois comprises entre ces surfaces se font équilibre, et que la poussée est la résultante des pressions que supportent les parois qui coïncident avec elles ; ces pressions étant normales à ces surfaces, il en est de même de leur résultante ; on voit ainsi que, dans les liquides en mouvement comme dans les liquides en repos, la poussée en tous les points est normale aux surfaces de niveau.

La surface libre étant une surface de niveau, la poussée des molécules superficielles est dirigée suivant sa normale.

Du moment de roulis. — Admettons que les dimensions transversales du navire soient négligeables relativement à celles des lames, et que celles-ci prennent le navire en travers ; la poussée exercée par le liquide sur la carène sera sensiblement égale à celle qu'il exercerait sur le liquide déplacé, elle sera donc normale à la lame ; en outre, les molé-