3° Si $d < l$, l'angle θ est négatif, le dénominateur restera en effet toujours positif, car $\cos\varphi$ est toujours au moins égal à $\cos\Phi$; par conséquent, pour les points de la tige compris entre O et A, la verticale apparente sera dirigée, relativement à la direction de la tige, du côté de la verticale vraie; en outre, elle sera toujours comprise entre ces deux directions, car $\operatorname{tg}\theta$ sera plus petit que $\operatorname{tg}\varphi$, le numérateur de (1) est en effet plus petit en valeur absolue que $\sin\varphi$ et son dénominateur est plus grand que $\cos\varphi$.

4° Si $d = 0$, on a $\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}\varphi$, ce qui est évident *à priori*, car, le point O étant immobile, la verticale apparente coïncide avec la verticale vraie et fait ainsi avec la tige un angle égal, à tout instant, à l'inclinaison de celle-ci.

5° Enfin, dans tous les points, on aura $\theta = 0$ pour $\varphi = 0$, c'est-à-dire que, lorsque la tige sera verticale, il en sera de même de la verticale apparente. En outre, l'inclinaison θ sera maximum quand le numérateur de (1) sera maximum et son dénominateur minimum, c'est-à-dire pour $\varphi = \Phi$.

Pour obtenir la formule convenant aux points situés sur le prolongement de la tige au-dessus du point O, il suffira de donner à d des valeurs négatives; pour examiner ce cas, remplaçons d par $-d'$ dans la formule (1), on aura :

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{(d'+l)\sin\varphi}{(l-2d')\cos\varphi + 2d'\cos\Phi}; \qquad (2)$$

si, dans cette formule, on fait $\varphi = \Phi$, on obtient :

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{d'+l}{l}\operatorname{tg}\Phi; \qquad (3)$$

d'ailleurs, en faisant la même hypothèse dans (1), on obtient :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d-l}{l}\operatorname{tg}\Phi; \qquad (4)$$

dans l'expression (3) $d' + l$ représente la distance du point considéré à la lentille; dans l'expression (4) $d - l$ représente la même quantité; or, si $d' + l = d - l$, ces deux expressions

donnent, pour θ, des valeurs égales et de signes contraires, donc :

Lorsque le pendule conducteur atteint ses inclinaisons maxima, les directions de la verticale apparente en deux points de la tige équidistants de la lentille font avec la direction de cette tige deux angles égaux et de signes contraires.

6° Supposons $d' < \frac{l}{2}$; alors le dénominateur de (2) est positif, de même le numérateur est positif; par conséquent, $\operatorname{tg}\theta$ est négatif; mais, en outre, en mettant cette expression sous la forme

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\frac{d'+l}{l}\sin\varphi}{\cos\varphi - 2\frac{d'}{l}(\cos\varphi - \cos\Phi)},$$

on voit que le dénominateur est plus petit que $\cos\varphi$ en valeur absolue et le numérateur plus grand que $\sin\varphi$; par conséquent, $\operatorname{tg}\theta$ est plus grand que $\operatorname{tg}\varphi$, et θ est plus grand que φ, donc enfin la verticale apparente et la tige conductrice sont dirigées de part et d'autre de la verticale vraie.

7° Nous ne nous arrêterons pas à la discussion complète du cas où $d' > \frac{l}{2}$, nous nous bornerons à faire remarquer que, si l'amplitude Φ est assez grande pour que l'on ait :

$$\cos\Phi < \frac{2d'-l}{2d'},$$

la direction de la verticale apparente au moment où la tige est droite ($\varphi = 0$) serait inverse de la verticale vraie; on voit en effet que la composante, normale à la tige, de l'accélération apparente serait nulle comme précédemment; mais la composante suivant la tige donnée par la formule générale

$$g\cos\varphi - 2g\frac{d'}{l}\cos\varphi + 2g\frac{d'}{l}\cos\Phi,$$

devient, pour $\varphi = 0$,

$$\frac{g}{l}\left[2d'\cos\Phi - (2d'-l)\right],$$

elle sera donc négative et dirigée de bas en haut dans le cas considéré.

Vérification expérimentale et conclusions. — Les principes que nous venons d'établir peuvent être facilement vérifiés expérimentalement, car ils sont vrais quelle que soit l'amplitude des oscillations; on peut donc donner au pendule conducteur des oscillations assez grandes pour que les écarts de la verticale apparente deviennent très saillants.

Si, aux différents points de la tige d'un pendule simple, prolongée de part et d'autre par une tige assez légère pour que la durée des oscillations ne soit pas sensiblement altérée, on suspend des pendules très courts, assez légers également pour ne pas influencer le pendule conducteur, et assez lourds cependant pour ne pas être influencés par la résistance de l'air, on verra ces pendules se comporter comme l'indique la figure 138. En deux points quelconques B et D tels que l'on ait AB = AD, l'inclinaison des pendules courts sur la tige sera la même aux instants où le pendule conducteur atteindra son maximum d'inclinaison; on conclut de là qu'au point C, tel que l'on ait AC = AO, AO = AC; on voit ainsi qu'au point C l'inclinaison de la verticale apparente sur la verticale vraie sera le double de celle de la tige conductrice.

Si, enfin, aux points A, B, C, D, on fixe une caisse légère imitant une cabine oscillante et contenant un pendule, un verre à demi rempli d'un liquide coloré, et enfin un plateau suspendu portant également un verre du même liquide, on verra ces objets se comporter comme l'indique la figure. L'observateur, naturellement enclin à apprécier à l'aide des pendules et des liquides l'inclinaison de sa cabine, conclurait donc, dans la position A, que cette cabine reste droite pendant le mouvement; dans la position B, il apprécierait son inclinaison dans le sens exact, mais il la croirait plus forte qu'elle n'est en réalité; enfin, au-dessous du point A, dans les positions telles que C et D, il se croirait incliné à contre de la réalité; dans la position C en particulier, il croirait la

cabine inclinée sur *tribord* d'une quantité égale à celle dont elle l'est en réalité sur *bâbord*.

On voit en résumé que, dans un mouvement d'oscillation de ce genre, les écarts entre la verticale apparente et la verticale

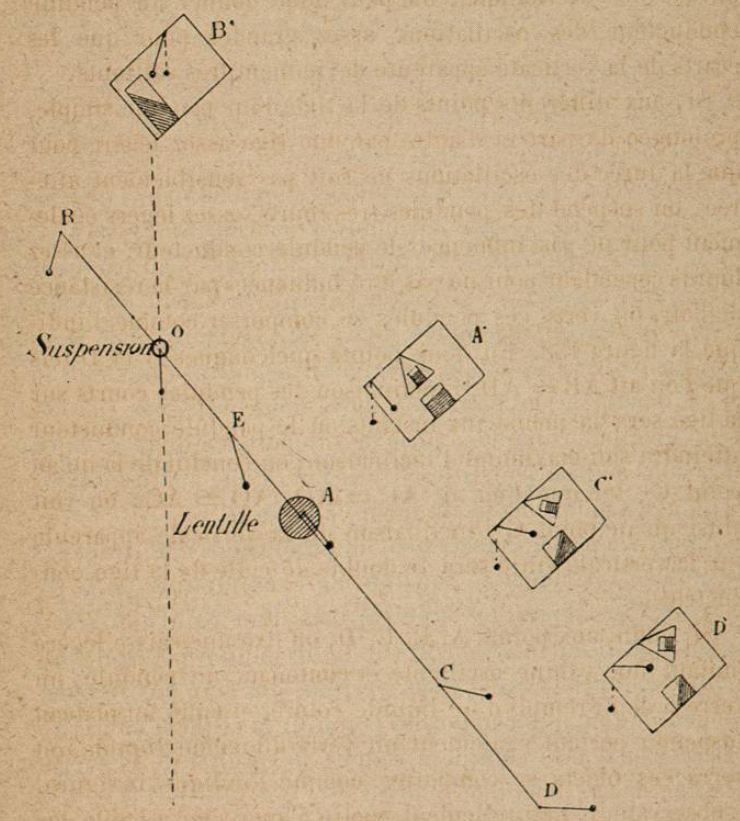

Fig. 138.

vraie peuvent atteindre et même dépasser l'inclinaison de la tige conductrice; ainsi, dans la nacelle d'une escarpolette qui oscillerait de 2° à 3° de chaque côté de la verticale, l'emploi des pendules ou des niveaux pour la mesure des inclinaisons

conduirait à des erreurs de 2° à 3°; il est évidemment difficile d'imaginer un mouvement oscillatoire plus doux que celui de cette nacelle.

§ 3. — Applications au personnel et au matériel embarqués sur les navires à la mer.

Si le mouvement du navire flottant sur la mer agitée était susceptible d'être exprimé par des équations, on pourrait essayer d'appliquer à l'étude des accélérations, dont les différents points de la coque sont animés, une méthode analogue à celle que nous venons d'employer pour quelques cas simples; malheureusement, les résultats auxquels sont parvenus les savants auteurs qui se sont occupés du problème du roulis sont loin d'avoir atteint ce degré de précision. Mais nous n'avons pas ici l'intention d'évaluer exactement l'inclinaison et l'intensité des accélérations, nous nous proposons simplement de donner une idée juste de l'importance de leurs effets et il nous suffira, pour atteindre ce but, d'une analyse superficielle des mouvements du navire à la mer.

Avant d'aborder directement le sujet, nous établirons les formules exprimant, en fonction de l'accélération de la pesanteur, les valeurs des accélérations d'un point qui serait animé soit d'un mouvement circulaire uniforme, soit d'un mouvement pendulaire; nous verrons plus loin que le mouvement de l'un quelconque des points de la coque d'un navire à la mer peut être considéré comme le résultat de la superposition de ces deux mouvements.

1° *Mouvement circulaire uniforme.* — Dans ce mouvement, l'*accélération totale* est dirigée vers le centre de la trajectoire et a pour valeur le produit du rayon par le carré de la vitesse angulaire, c'est-à-dire, en désignant par T la durée d'une révolution et par R le rayon,

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R;$$

le carré de π étant sensiblement égal à l'accélération g de la pesanteur, on peut écrire :

$$\text{Accélération totale} = g\cdot\frac{4R}{T^2}. \qquad (1)$$

2° *Mouvement pendulaire.* — L'équation du mouvement pendulaire d'une droite pour les petites oscillations est, en désignant par θ l'inclinaison à un instant donné sur la position moyenne, par Θ l'amplitude des oscillations de part et d'autre de cette position et par T la durée d'une oscillation simple :

$$\theta = \Theta\cos\left(\frac{\pi}{T}\cdot t\right).$$

On en déduit pour la vitesse et pour l'accélération *angulaires :*

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Theta\frac{\pi}{T}\sin\left(\frac{\pi}{T}\cdot t\right),$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{T^2}\cos\left(\frac{\pi}{T}\cdot t\right).$$

L'accélération totale d'un point de cette droite, situé à une distance l de l'axe fixe, peut être décomposée en deux : l'*accélération tangentielle*, qui a pour valeur $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$, et l'*accélération centripète*, qui a pour valeur $l\frac{d\theta^2}{dt^2}$; la première atteint son maximum en même temps que l'accélération angulaire, c'est-à-dire quand $\theta = \Theta$, et l'on a :

$$\text{Maximum de l'accélération tangentielle} = \frac{l\Theta}{T^2}\pi^2,$$

et l'accélération centripète quand $\theta = 0$,

$$\text{Maximum de l'accélération centripète} = \frac{l\Theta^2}{T^2}\pi^2;$$

en remplaçant dans ces formules le carré de π par g, on obtient les formules suivantes suffisamment approchées :

$$\text{Maximum de l'accélération tangentielle} = g\cdot\frac{l\Theta}{T^2}, \qquad (2)$$

$$\text{Maximum de l'accélération centripète} = g\cdot\frac{l\Theta^2}{T^2}. \qquad (3)$$

Du poids apparent aux différents points du navire à la mer. *Du navire flottant sur la houle sans roulis ni tangage.* — On a vu que les navires qui ont une faible stabilité transversale et un grand moment d'inertie autour d'un axe longitudinal roulent à peine lorsqu'ils flottent en travers à la houle; ce serait cependant une erreur que de croire que, sur ces bâtiments, les pendules et les niveaux indiquent fidèlement la verticale vraie. Lorsqu'on observe simultanément les petites oscillations à l'aide d'un pendule et à l'aide de l'horizon de la mer, on reconnaît rapidement que les résultats sont absolument discordants; cela tient à ce que, bien que le navire ne roule pas, il est néanmoins soulevé et abaissé successivement par les ondes qui passent sous lui, et que chacun de ses points est animé ainsi d'un mouvement orbitaire analogue à celui de la masse d'eau qui le porte. Le mouvement des points du navire est, sans aucun doute, différent du mouvement circulaire et uniforme des molécules liquides de la houle théorique; néanmoins, il présente avec lui une assez grande analogie pour que l'on puisse prendre les accélérations de ce dernier comme base d'appréciation pour l'évaluation des inclinaisons et des intensités des accélérations du mouvement vrai.

Or, d'après les observations de M. Paris, la hauteur moyenne des vagues des alizés de l'Atlantique nord est 2 mètres, et la période moyenne de crête en crête est $5^s,9$; on aura donc, d'après la formule (1), en faisant $R = 1$, pour valeur du rapport de l'accélération du mouvement à celle de la pesanteur,

$$\frac{4}{(5,9)^2} = \text{environ } \frac{1}{9^e}.$$

M. le contre-amiral Mottez, à bord de la *Loire*, par une mer de 8 mètres de hauteur dont il ne donne pas la période, trouva expérimentalement $\frac{1}{5^e}$ (*Revue marit.*, t. XLVII, p. 86); consultant les résultats des observations de M. Paris, on trouve qu'à des mers moyennes de 8 mètres correspond une

période de $9^s,5$; en appliquant la formule (1), on trouve précisément :

$$\frac{4 \times 4}{(9,5)^2} = \frac{1}{5,6}.$$

Cette accélération donnerait des écarts d'environ 10° aux pendules courts, et ces valeurs ne sont pas les plus grandes de celles que l'on peut rencontrer à la mer.

Du roulis en travers à la houle. — Quand le navire roule en travers à la houle, le milieu de sa flottaison droite reste à peu près en contact avec une génératrice des ondes, de sorte que le mouvement peut, avec une approximation suffisante, être considéré comme un mouvement pendulaire autour d'un axe qui décrit un cylindre dans l'espace; les accélérations de ses divers points sont donc les résultantes des accélérations du mouvement orbitaire de l'axe de la flottaison et de celles qu'engendrerait le mouvement pendulaire autour d'un axe fixe.

Ces dernières, décomposées en accélérations tangentielles et centripètes, ont pour expressions les formules (2) et (3) dans lesquelles Θ représentera l'écart maximum du navire relativement à la verticale et T la durée d'une oscillation simple.

Pour les roulis de.	5°	10°	15°
les valeurs de Θ sont respectivement.	0,087	0,174	0,261
et celles de Θ^2	0,0076	0,0303	0,0681

Enfin si, pour fixer les idées, l'on considère un navire roulant en 5 secondes, on aura :

pour les valeurs de $\frac{\Theta}{T^2}$	0,0035	0,0070	0,010
pour celles de $\frac{\Theta^2}{T^2}$	0,0003	0,0012	0,0027

Pour obtenir les accélérations tangentielles en fonctions de g, il faudra multiplier les valeurs de $\frac{\Theta}{T^2}$ par la distance l du point considéré à l'axe de la flottaison, et, pour obtenir les

accélérations centripètes, il faudra multiplier celles de $\frac{\Theta^2}{T^2}$ par le même facteur ; ainsi, sur un navire de 12 mètres de large, aux extrémités de la passerelle on aurait environ $l = 7$ mètres, et les accélérations pourraient atteindre les valeurs suivantes relativement à l'accélération de la pesanteur :

Amplitudes des roulis	5°	10°	15°
Accélérations tangentielles.	0 ,024	0 ,05	0 ,07
Accélérations centripètes.	0 ,002	0 ,008	0 ,02

On est assez généralement porté à attribuer aux accélérations du mouvement pendulaire la plus grande part des effets dynamiques que subit le matériel embarqué pendant le roulis, et, comme ces accélérations sont nulles vers l'axe de la flottaison, on en conclut que les points situés dans cette région sont soustraits à l'influence du mouvement du navire ; mais, comme nous l'avons dit plus haut, il faut, pour obtenir les accélérations totales, composer les accélérations du mouvement pendulaire que nous venons d'obtenir avec celles du mouvement orbitaire de l'axe établies plus haut, et il résulte des chiffres qui précèdent que celles-ci sont en général beaucoup plus intenses que les premières ; elles ont par conséquent une influence prépondérante sur les variations d'intensité et de direction du poids apparent. Lorsqu'il y a un peu de levée, ce qui a généralement lieu par des roulis sensibles, les accélérations du mouvement pendulaire constituent, relativement à celles du mouvement orbitaire, des influences perturbatrices de second ordre ; or, les accélérations du mouvement orbitaire sont communes à tous les points de la coque en travers à la houle, elles donneraient donc, si elles agissaient seules, une même direction et une même intensité à la pesanteur apparente aux divers points, les divergences qui peuvent exister d'un point à un autre provenant de ces influences secondaires sont peu sensibles ; c'est pour cela que dans une chambre qui occupe tout le travers du navire, les objets

suspendus semblent rester parallèles entre eux ; des mesures précises permettraient seules d'apprécier les différences d'inclinaison.

Avant de quitter ce sujet, nous croyons utile de rappeler qu'il n'y a que les pendules très courts qui puissent donner la direction de la pesanteur apparente ; il faut, à bord des navires qui roulent en 5 secondes, prendre des pendules dont la période n'excède pas $\frac{1}{5}$ de seconde par exemple ; les pendules que l'on rencontre quelquefois sur les navires ont une période plus longue ; alors ils ne donnent plus ni la verticale apparente, ni la verticale vraie, ni, bien entendu, une direction comprise entre celles-ci.

Ce que nous venons de dire relativement à la prépondérance des influences du mouvement orbitaire ne se rapporte évidemment qu'aux points de la coque elle-même ; les accélérations du mouvement pendulaire sont en effet proportionnelles aux distances des points à l'axe de la flottaison ; par conséquent, dans la mâture, elles acquièrent de grandes intensités ; les accélérations centripètes ont pour effet de *diminuer* la pesanteur apparente, les accélérations tangentielles agissent horizontalement en travers des mâts et comme elles croissent à mesure que l'on s'élève, elles tendent à les faire fléchir et fatiguent le gréement.

Les accélérations tangentielles atteignent leurs maxima aux instants où le navire est à ses inclinaisons maxima ; elles sont perpendiculaires à la ligne qui joint le point considéré à l'axe de la flottaison, et sont à chaque instant dirigées de manière à tendre à rapprocher le point de la position moyenne d'équilibre, c'est-à-dire qu'elles sont descendantes quand le point est au-dessus de cette position, et ascendantes quand il est au-dessous ; elles changent ainsi de sens dans le cours d'une même oscillation. Les accélérations centripètes sont au contraire dirigées constamment vers l'axe et atteignent leurs maxima quand le navire est droit ; ces accélérations sont moins intenses que les précédentes.

Du navire faisant route dans le sens de la propagation des vagues ou en sens contraire. — Ainsi que nous l'avons dit au chapitre précédent, les oscillations du navire dans le tangage offrent des caractères très différents de ceux du roulis. La période du tangage en eau calme étant très courte, le navire qui fait route la lame de l'arrière se comporte comme une planche flottante, c'est-à-dire qu'il reste parallèle à la pente moyenne de la région qu'il occupe sur la vague ; cela tient à ce que, sous l'influence de son couple de stabilité puissant, il cède immédiatement aux forces qui le sollicitent ; mais lorsqu'il fait route debout à la mer, la période des lames est raccourcie par la vitesse du navire et le couple moteur change si rapidement que le navire n'a pas le temps nécessaire pour céder à son action ; on voit alors les crêtes des lames couvrir l'avant, tandis qu'au contraire, aussitôt après leur passage, le *brion* du navire est presque entièrement émergé.

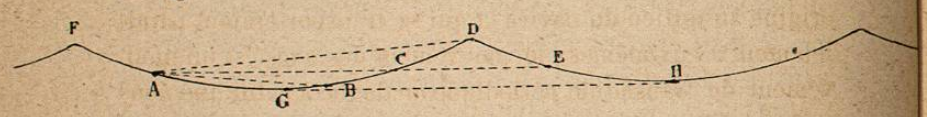

Fig. 139.

Lorsque le navire fait route l'arrière à la lame, sa position est sensiblement parallèle à tout instant à une corde de la direction des ondes menée du point où se trouve l'arrière et ayant pour longueur la longueur de sa flottaison ; ainsi, lorsque l'arrière est en A (fig. 139), le navire est sensiblement incliné suivant AB, AC ou AD, suivant sa longueur. Si le navire a pour longueur la longueur AE de la lame, il reste sensiblement horizontal et le tangage est nul ; mais il est animé d'un mouvement de translation alternatif de bas en haut et de haut en bas, ayant pour période la période de succession des lames. L'amplitude verticale de ce mouvement est évidemment beaucoup moindre que la hauteur de crête en creux, car, lorsque l'avant et l'arrière portent sur 2 crêtes F et D, la flottaison descend un peu au-dessous de la ligne FD

pour compenser l'émersion causée par le creux de la lame dans la maîtresse partie, et inversement, quand l'arrière et l'avant correspondent à deux creux, la flottaison est au-dessus de la ligne GH, parce que le navire est soulevé par la crête qui agit sur sa maîtresse partie ; néanmoins, sauf dans le cas où les lames sont peu escarpées, le mouvement vertical persiste. D'un autre côté, il existe également des oscillations horizontales relativement à un point qui serait animé d'un mouvement horizontal uniforme, de vitesse égale à la vitesse moyenne du navire, car, lorsque l'avant pénètre dans une crête, la résistance à la marche est naturellement plus forte que lorsqu'il correspond à un creux. Ces oscillations engendrent des accélérations qui sont les mêmes pour tous les points du navire et qui peuvent occasionner des variations notables dans la verticale apparente.

Lorsque le navire est plus court que la lame, on peut rapporter son mouvement à un système d'axes qui auraient leur origine au milieu du navire et qui se transporteraient parallèlement à eux-mêmes ; le mouvement des axes est un mouvement de translation périodique analogue à celui que nous venons de décrire, et celui du navire relativement à ces axes est un mouvement pendulaire autour d'un axe transversal. Mais ici, contrairement à ce que nous avons obtenu pour le roulis, les accélérations du mouvement pendulaire ont une influence prépondérante aux extrémités du navire ; les accélérations tangentielles sont dans ce cas sensiblement verticales, et elles tendent, comme nous l'avons dit, à rapprocher le navire de la position moyenne, de sorte que lorsque la dunette est *au-dessous* de la position normale d'équilibre, l'accélération tangentielle est *ascendante*, par conséquent le poids apparent est plus grand que le poids vrai ; lorsqu'au contraire la dunette est *au-dessus* de la position droite, l'accélération tangentielle est *descendante* et le poids apparent est moindre que le poids vrai.

Ce sont précisément ces accélérations tangentielles qui sont cause que, dans le tangage, les hommes situés sur la