$$\frac{1}{3}\frac{d^4(r^3)}{d\varphi^4} = -2\rho_4\frac{1}{2}y^2 - 9\rho_3\frac{1}{3}\frac{d(y^3)}{dz} - 30\rho_2\frac{1}{2}y^2 - 16\rho_2\frac{1}{4}\frac{d^2(y^4)}{dz^2}$$
$$-103\rho_1\frac{1}{3}\frac{d(y^3)}{dz} - 14\rho_1\frac{1}{5}\frac{d^3(y^5)}{dz^3} + 6\rho_2^2 y + 39\rho_1^2\frac{1}{3}\frac{d^2(y^3)}{dz^2}$$
$$+8\rho_1\rho_2 y + 28\rho_1^2 y + 44\rho_1\rho_2\frac{1}{2}\frac{d(y^2)}{dz} - 12\rho_1^2\rho_2 - 12\rho_1^3\frac{dy}{dz}$$
$$+33\frac{1}{3}y^3 + 26\frac{1}{5}\frac{d^2(y^5)}{dz^2} + \frac{1}{7}\frac{d^4(y^7)}{dz^4}. \qquad (16)$$

Remarque générale sur les formules (14), (15), (16). — On voit que, ainsi que nous l'avons annoncé, les expressions trouvées sont linéaires relativement aux dérivées des puissances de y; on voit même que, si l'on prend les moitiés des dérivées des carrés et les tiers de celles des cubes de r, les coefficients numériques des quantités $\frac{1}{n}\frac{d^p(y^n)}{dz^p}$ sont des nombres entiers; nous avons mis partout ces quantités en évidence, parce que ce sont elles qui se présenteront dans la suite.

§ 2. — Volume des carènes obliques correspondantes à des flottaisons dont l'enveloppe est donnée. Équation de la courbe des flottaisons isocarènes.

Volume des carènes obliques. — Soit actuellement (fig. 2) OA une courbe dont l'équation est donnée sous la forme :

$$s = \rho_1\varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\rho_2\varphi^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\rho_3\varphi^3 + \ldots;$$

soient en outre CD et C′D′, deux courbes dont les équations sont supposées ramenées à la forme :

$$r = f(\varphi), \qquad r' = f'(\varphi).$$

Désignant par S l'aire ECC′E′, on a :

$$\frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{2}(r^2 - r'^2)$$
$$\frac{d^2S}{d\varphi^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{d(r^2)}{d\varphi} - \frac{d(r'^2)}{d\varphi}\right]$$
$$\frac{d^nS}{d\varphi^n} = \frac{1}{2}\left[\frac{d^{n-1}(r^2)}{d\varphi^{n-1}} - \frac{d^{n-1}(r'^2)}{d\varphi^{n-1}}\right].$$

Pour obtenir les valeurs de ces dérivées pour $\varphi = 0$, il suffirait d'appliquer les formules (15), mais à la condition que, pour les deux courbes, on prenne pour axes des coordonnées positives les mêmes axes OZ et OY ; si, pour la courbe de gauche, on convient de compter les abscisses positivement dans le sens OY′, il faudra, en appliquant les formules (15) à cette courbe, changer le signe de y' et de ses puissances impaires.

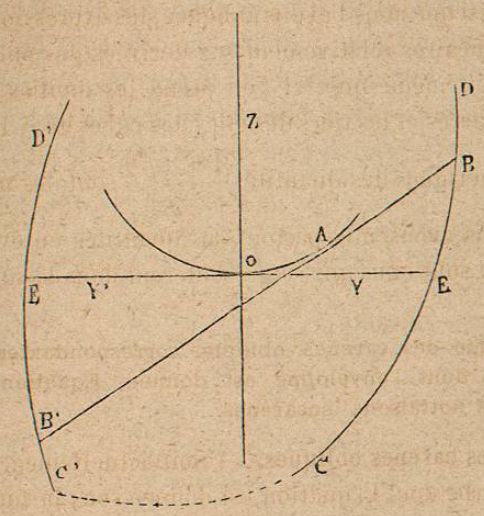

Fig. 2.

Posons pour simplifier les écritures :

$$a_1 = y + y', \qquad a_2 = \frac{1}{2}(y^2 - y'^2)\ldots a_n = \frac{1}{n}\left[y^n - (-y')^n\right]$$

on obtiendra :

$$\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)_0 = a_2,$$
$$\left(\frac{d^2S}{d\varphi^2}\right)_0 = -\rho_1 a_1 + \frac{d(a_3)}{dz},$$
$$\left(\frac{d^3S}{d\varphi^3}\right)_0 = -\rho_2 a_1 - 3\rho_1\frac{d(a_2)}{dz} + 2a_2 + \frac{d^2(a_4)}{dz^2}, \qquad (17)$$

$$\left(\frac{d^4S}{d\varphi^4}\right)_0 = -\rho_3 a_1 - 4\rho_2 \frac{d(a_2)}{dz} - 5\rho_1 a_1 - 6\rho_1 \frac{d^2(a_3)}{dz^2} + 3\rho_1^2 \frac{da_1}{dz} + 8\frac{d(a_3)}{dz} + \frac{d^3(a_5)}{dz^3}$$

Si nous supposons maintenant que CD et C′D′ soient les sections déterminées dans deux surfaces par un plan perpendiculaire à un axe mené par le point O et que nous prendrons pour axe des X, qu'en outre OA soit la section droite d'un cylindre parallèle à cet axe, et enfin que BB′ soit la trace d'un plan tangent à ce cylindre, on obtiendra les dérivées successives du volume limité par ce plan en multipliant par dx les deux membres des formules (17) et en intégrant relativement à cette variable; on aura ainsi, en posant d'une manière générale

$$A_n = \int a_n\, dx = \frac{1}{n}\int \left[y^n - (-y')^n\right] dx, \qquad (18)$$

les expressions suivantes :

$$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)_0 = A_2,$$

$$\left(\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right)_0 = -\rho_1 A_1 + \frac{dA_3}{dz}.$$

$$\left(\frac{d^3V}{d\varphi_3}\right)_0 = -\rho_2 A_1 - 3\rho_1 \frac{dA_2}{dz} + 2A_2 + \frac{d^2A_4}{dz^2}$$

$$\left(\frac{d^4V}{d\varphi^4}\right)_0 = -\rho_3 A_1 - 4\rho_2 \frac{dA_2}{dz} - 5\rho_1 A_1 - 6\rho_1 \frac{d^2A_3}{dz^2} + 3\rho_1^2 \frac{dA_1}{dz} + 8\frac{dA_3}{dz} + \frac{d^3A_5}{dz^3}. \qquad (19)$$

Cas particulers où les plans obliques passent tous par l'axe OX. — Les formules deviennent très simples dans ce cas particulier, car tous les rayons ρ sont nuls ; on a :

$$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)_0 = A_2,$$

$$\left(\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right)_0 = +\frac{dA_3}{dz},$$

$$\left(\frac{d^3V}{d\varphi^3}\right)_0 = +2A_2 + \frac{d^2A_4}{dz^2},$$

$$\left(\frac{d^4V}{d\varphi^4}\right)_0 = +8\frac{dA^3}{dz} + \frac{d^3A_5}{dz^3}. \qquad (20)$$

Cas particulier où les murailles ainsi que l'enveloppe du plan mobile sont symétriques. — Dans ce cas, toutes les quantités A_i d'indice pair sont nulles ainsi que leurs dérivées, et on obtient :

$$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^3V}{d\varphi^3}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right)_0 = -\rho_1 A_1 + \frac{dA_3}{dz},$$

$$\left(\frac{d^4V}{d\varphi^4}\right)_0 = -\rho_3 A_1 - 5\rho_1 A_1 - 6\rho_1 \frac{d^2A_3}{dz^2} + 3\rho_1^2 \frac{dA_1}{dz} + 8\frac{dA_3}{dz} + \frac{d^3A_5}{dz^3}. \qquad (21)$$

Enfin, pour le cas où les plans obliques passent tous par l'axe OX, on aura :

$$\left(\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right)_0 = \frac{dA_3}{dz},$$

$$\left(\frac{d^4V}{d\varphi^4}\right)_0 = 8\frac{dA_3}{dz} + \frac{d^3A_5}{dz^3}. \qquad (22)$$

Formule générale. — Les formules (19) et (20) donnent, pour le cas où les murailles du solide sont dissymétriques, les coefficients des quatre premiers termes du développement de V suivant les puissances de φ :

$$V = V_0 + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)_0 \varphi + \frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2V}{d\varphi^2}\right)_0 \varphi^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{d^3V}{d\varphi^3}\right)_0 \varphi^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4V}{d\varphi^4}\right)_0 \varphi^4$$

et fournissent une approximation aux termes du 5ᵉ ordre près.

Les formules (21) et (22) donnent les mêmes quantités pour le cas où les murailles sont symétriques; alors les termes d'ordre impair sont nuls, et on a une approximation aux termes du 6ᵉ ordre près.

Courbe des flottaisons isocarènes. — Pour que les flottaisons obliques soient isocarènes avec la flottaison droite, c'est-à-dire pour que le volume détaché par le plan mobile BB′ soit constant, il faut et il suffit que les dérivées successives de V soient nulles ; on obtiendra donc les rayons de courbure des divers ordres de la courbe qui satisfera à cette condition en égalant à zéro les deuxièmes membres des relations (19) ; on aura ainsi, pour le cas des murailles dissymétriques :

$$A_2 = 0,$$

$$A_1\rho_1 = \frac{dA_3}{dz},$$

$$A_1\rho^2 = -3\rho_1\frac{dA_2}{dz} + 2A_2 + \frac{d^2A_4}{dz^2},$$

$$A_1\rho_3 = -4\rho_2\frac{dA_2}{dz} - 5\rho_1A_1 - 6\rho_1\frac{d^2A_3}{dz^2} + 3\rho_1^2\frac{dA_1}{dz} + 8\frac{dA_3}{dz} + \frac{d^3A_5}{dz^3};$$

les deux dernières se réduisent en tenant compte des deux premières et l'on a finalement :

$$A_2 = 0,$$

$$A_1\rho_1 = \frac{dA_3}{dz},$$

$$A_1\rho_2 = -3\rho_1\frac{dA_2}{dz} + \frac{d^2A_4}{dz^2},$$

$$A_1\rho_3 = +3\rho_1A_1 + 3\rho_1^2\frac{dA_1}{dz} - 4\rho_2\frac{dA_2}{dz} - 6\rho_1\frac{d^2A_3}{dz^2} + \frac{d^3A_5}{dz^3}. \quad (23)$$

Dans le cas des murailles symétriques, les termes qui contiennent les quantités A_i d'indice pair disparaissent et il vient :

$$A_1\rho_1 = \frac{dA_3}{dz},$$

$$A_1\rho_2 = 0,$$

$$A_1\rho_3 = 3A_1\rho_1 + 3\rho_1^2\frac{dA_1}{dz} - 3\rho_1\frac{d^2A_3}{dz_2} + \frac{d^3A_5}{dz^3}. \quad (24)$$

Tracé d'une flottaison isocarène inclinée d'un angle donné φ. — Nous avons vu comment, à l'aide des rayons de courbure successifs, on pouvait tracer la courbe, mais on peut se proposer de tracer une flottaison isocarène d'une inclinaison donnée sans tracer la courbe entière. Pour résoudre ce problème, il suffit de calculer la valeur de OD (fig. 3) en fonction des rayons de courbure successifs de la courbe OA.

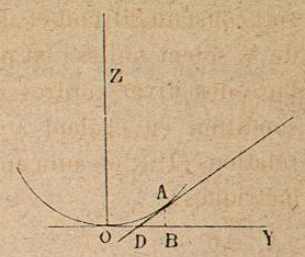

Fig. 3.

Or, en désignant OD par δ, puis AB et OB respectivement par ζ et η, on a, sur la figure :

$$\delta = \eta - \zeta \operatorname{cotg}\varphi,$$

avec

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \rho_1 \sin\varphi; \qquad \frac{d\zeta}{d\varphi} = \rho_1 \cos\varphi;$$

on en déduit, en différentiant la première relation et en tenant compte des deux autres,

$$\frac{d\delta}{d\varphi}\sin^2\varphi = n$$

et

$$\frac{d^2\delta}{d\varphi^2}\sin\varphi + 2\frac{d\delta}{d\varphi}\cos\varphi = \rho_1,$$

prenant les dérivées successives et faisant $\varphi = 0$ dans les résultats, on obtient finalement :

$$\left(\frac{d\delta}{d\varphi}\right)_0 = \frac{\rho_1}{2}, \quad \left(\frac{d^2\delta}{d\varphi^2}\right)_0 = \frac{\rho_2}{3}, \quad \left(\frac{d^3\delta}{d\varphi^3}\right)_0 = \frac{\rho_1+\rho_3}{4}, \quad \left(\frac{d^4\delta}{d\varphi^4}\right)_0 = \frac{3\rho_1+7\rho^2}{5\cdot 3}.$$

On aura donc finalement, dans le cas des murailles dissymétriques :

$$\delta = \frac{\rho_1}{2}\varphi + \frac{\rho_2}{3}\frac{\varphi^2}{1\cdot 2} + \frac{\rho_1+\rho_3}{4}\frac{\varphi^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3\rho_1+7\rho_2}{5\cdot 3}\frac{\varphi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}. \quad (25)$$

et, dans le cas des carènes symétriques :

$$\delta = \frac{\rho_1}{2}\varphi + \frac{\rho_1+\rho_3}{4}\frac{\varphi^3}{1\cdot 2\cdot 3}. \quad (26)$$

§ 3. — Équation de la courbe des centres de carène, bras de levier du couple de stabilité.

Équation de la courbe des centres de carène. — Soient BB′ et DD′ (fig. 4) deux flottaisons isocarènes infiniment voisines, g et g' les projections, sur le plan de la figure, des centres des onglets infiniment petits, C et C′ celles des centres de carène infiniment voisins; on sait que CC′ est parallèle à gg' et que, si l'on appelle V le volume de la carène et v celui de l'un des onglets, on a :

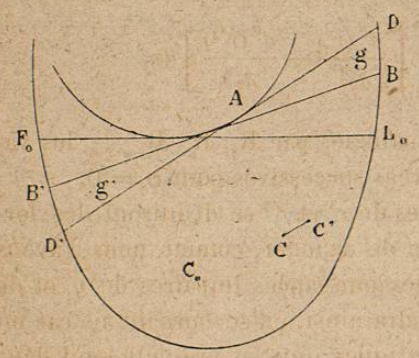

Fig. 4.

$$V \times CC' = v \times gg'.$$

Or CC′ est un arc infiniment petit de la courbe C, et $v \times gg'$ représente la somme des valeurs absolues des moments des onglets relativement au plan perpendiculaire à gg' mené par le point A; on aura donc, en appelant ds l'arc CC′ et $d\varphi$ l'inclinaison de DD′ sur BB′,

$$V \cdot ds = \frac{1}{3}\int (r^3 - r'^3)\, d\varphi dx;$$

l'intégrale étant prise par rapport à x; les limites de cette intégrale étant indépendantes de φ, on déduit de là :

$$V \cdot \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{3}\int (r^3 - r'^3)\, dx.$$

Mais, les tangentes en C et C′ à la courbe des centres de carène étant respectivement parallèles à BB′ et DD′, l'angle

$d\varphi$ représente l'angle de contingence et $\frac{ds}{d\varphi}$ le rayon de courbure; en désignant ce rayon par R, on aura donc :

$$VR = \frac{1}{3}\int (r^3 - r'^3)\, dx;$$

on déduit de là, d'une manière générale

$$V\frac{d^n R}{d\varphi^n} = \frac{1}{3}\int \left[\frac{d^n(r^3)}{d\varphi^n} - \frac{d^n(r'^3)}{d\varphi^n}\right] dx;$$

nous désignerons, par analogie, par R_1, R_2, R_3 ... les valeurs de R et de ses dérivées successives pour $\varphi = 0$.

Les valeurs des dérivées de r^3 et r'^3 se déduiront des formules (16), en ayant soin de changer, comme nous l'avons dit plus haut, le signe des puissances impaires de y' et de leurs dérivées; on obtiendra ainsi, en se bornant au cas où les murailles sont symétriques, qui se présente seul dans l'application que nous avons en vue :

$$R_2 = 0, \qquad R_4 = 0,$$

puis :

$$VR_1 = A_3,$$

$$VR_3 = 3VR_1 + 2\rho_1^2 A_1 - 5\rho_1 \frac{dA_3}{dz} + \frac{d^2 A_5}{dz^2},$$

$$VR_5 = -9\rho_3 \frac{dA_3}{dz} - 103\rho_1 \frac{dA_3}{dz} - 14\rho_1 \frac{d^3 A_5}{dz^3} + 39\rho_1^2 \frac{d^2 A_3}{dz^2}$$
$$+ 28\rho_1^2 A_1 + 8\rho_1\rho_3 A_1 - 12\rho_1^3 \frac{dA_1}{dz} + 33A_3 + 26\frac{d^2 A_5}{dz^2} + \frac{d^4 A_7}{dz^4}.$$

Simplification des deux dernières expressions. — En remplaçant dans VR_3 la dérivée $\frac{dA_3}{dz}$ par sa valeur $\rho_1 A_1$ tirée de la première des équations du système (24), on obtient la forme plus simple

$$VR_3 = 3VR_1 - 3\rho_1^2 A_1 + \frac{d^2 A_5}{dz^2};$$

pour simplifier VR_5, écrivons l'identité suivante, résultant de l'expression qui vient d'être établie,

$$0 = +VR_3 - 3VR_1 + 3\rho_1^2 A_1 - \frac{d^2 A_5}{dz^2},$$

et celle qu'on obtient en multipliant par ρ_1 la troisième des relations (24) et en faisant passer le premier membre dans le second :

$$0 = +\rho_1\rho_3 A_1 - 3\rho_1^2 A_1 - 3\rho_1^3 \frac{dA_1}{dz} + 6\rho_1^2 \frac{d^2 A_3}{dz^2} - \rho_1 \frac{d^3 A_5}{dz^3};$$

en multipliant les deux membres de la première de ces identités par m, ceux de la deuxième par n, et ajoutant membre à membre avec la relation qui donne VR_5, on reconnaît aisément qu'on fait disparaître trois termes en donnant aux indéterminées m et n les systèmes de valeurs

$$m = +11, \qquad n = -14,$$
$$m = 26, \qquad n = 1;$$

la valeur de VR_5 est ainsi réduite à six termes des deux manières suivantes :

$$VR_5 = 11VR_3 - 15\rho_1\rho_3 A_1 - 45\rho_1^2 \frac{d^2 A_3}{dz^2} + 30\rho_1^3 \frac{dA_1}{dz} + 15 \frac{d^2 A_5}{dz^2} + \frac{d^4 A_7}{dz^4},$$

$$VR_5 = 26VR_3 - 45VR_1 - 15\rho_1 \frac{d^3 A_5}{dz^3} + 45\rho_1^2 \frac{d^2 A_3}{dz^2} - 15\rho_1^3 \frac{dA_1}{dz} + \frac{d^4 A_7}{dz^4}.$$

Formules définitives. — On a donc enfin, dans le cas des carènes symétriques,

$$VR_1 = A_3,$$

$$VR_3 = 3VR_1 - 3\rho_1^2 A_1 + \frac{d^2 A_5}{dz^2}, \tag{27}$$

$$VR_5 = 26VR_3 - 45VR_1 - 15\rho_1 \frac{d^3 A_5}{dz^3} + 45\rho_1^2 \frac{d^2 A_3}{dz^2} - 15\rho_1^3 \frac{dA_1}{dz} + \frac{d^4 A_7}{dz^4}.$$

Bras de levier du couple de stabilité. — Soit (fig. 5) $C_0 C_1$ la courbe des centres de carène, $m_0 m_1$ sa développée, et μ_1

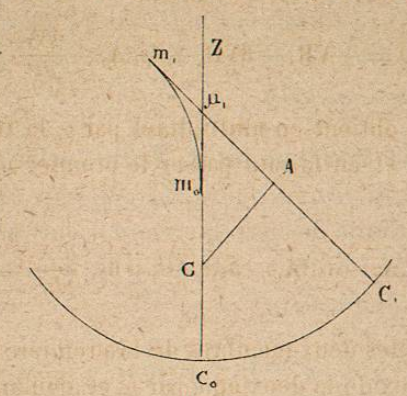

Fig. 5.

le point où la normale $C_1 m_1$ à la courbe C coupe l'axe du plan transversal $C_0 Z$; si G est le centre de gravité, le bras de levier du couple de stabilité est GA, et l'on a :

$$GA = G\mu_1 \sin\varphi = (C_0\mu_1 - C_0 G)\sin\varphi,$$

c'est-à-dire, en désignant par H la *hauteur métacentrique* $C_0 \mu_1$ et par a la distance $C_0 G$ du centre de gravité au-dessus du centre de carène initial,

$$GA = (H - a)\sin\varphi.$$

Hauteur métacentrique. — On a

$$H = C_0 m_0 + m_0\mu_1 = R_1 + m_0\mu_1;$$

mais, en appliquant à la courbe $m_0 m_1$ le résultat représenté par la formule (25), et en remarquant que le rayon de courbure de cette courbe est R_2, on voit que cette formule devient :

$$H = R_1 + \frac{R_2}{2}\varphi + \frac{R^3}{3}\frac{\varphi^2}{1\cdot 2} + \frac{R_2 + R_4}{4}\frac{\varphi^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{7R_3 + 3R_5}{3\cdot 5}\frac{\varphi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

et comme pour les carènes symétriques les rayons de courbure d'indice pair sont nuls, on obtient finalement :

$$H - a = (R_1 - a) + R_3 \frac{\varphi^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{7R_3 + 3R_5}{15}\frac{\varphi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}. \tag{28}$$