Hauteur métacentrique différentielle. — En remplaçant, dans la valeur de H, les rayons R_1, R_2... par ρ_1, ρ_2..., on obtiendra la *hauteur métacentrique différentielle,* qui est nécessaire au calcul du bras de levier de la stabilité différentielle (*Théorie du navire,* p. 141).

Extension du théorème de M. Émile Leclert. — *Relation entre les rayons de courbure du même ordre des courbes C et F.* On doit à M. Émile Leclert la relation suivante entre les rayons du premier ordre ρ_1 et R_1 qui a été démontrée au chapitre II de la *Théorie du navire,* p. 37 :

$$\rho_1 = R_1 + V\frac{dR_1}{dV};$$

cette relation existe entre tous les rayons de courbure de même ordre ; si l'on différentie en effet relativement à φ, en supposant V constant, on aura :

$$\frac{d\rho_1}{d\varphi} = \frac{dR_1}{d\varphi} + V\frac{d^2R_1}{dVd\varphi},$$

c'est-à-dire

$$\rho_2 = R_2 + V\frac{dR_2}{dV},$$

et ainsi de suite.

§ 4. — Règles et tableaux pour l'application de la méthode.

Tracé des lignes d'eau, mesure des ordonnées. — La méthode que nous venons d'exposer exige l'emploi de lignes d'eau équidistantes, réparties symétriquement par rapport à la flottaison FL (fig. 6), en nombre d'autant plus grand que l'on désire une approximation plus élevée ; ainsi, la flottaison seule suffit à la détermination du rayon de courbure de la courbe des centres de carène ; pour déterminer le rayon de courbure de sa développée du deuxième ordre, il faut une ligne d'eau de part et d'autre de FL ; pour déterminer celui de la développée du quatrième ordre, il faut deux nouvelles lignes d'eau ; une approximation supérieure exigerait l'em-

ploi de trois lignes d'eau au-dessus et au-dessous de FL. On sait que, par suite de la symétrie de la coque, les développées d'ordre impair présentent à l'origine un point de rebroussement de première espèce et que, par conséquent, leurs rayons de courbure sont nuls.

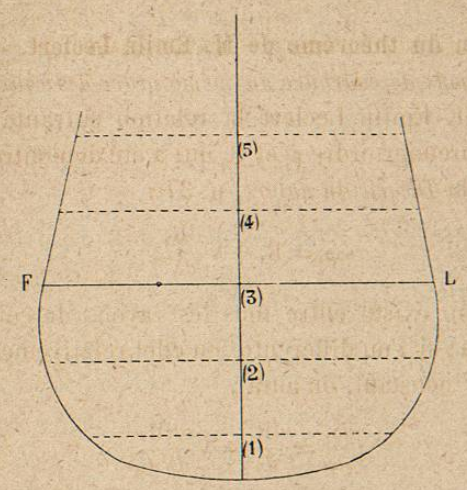

Fig. 6.

On peut voir également par les formules que nous avons données que, lorsqu'on emploie la flottaison seule, on n'a besoin que des sommes des cubes des ordonnées ; si l'on emploie deux lignes d'eau supplémentaires, on a besoin des 5es puissances ; si l'on en emploie quatre, on aura besoin des 7es puissances, et on aurait besoin enfin des 9es puissances si l'on employait six lignes d'eau.

Pour obtenir le degré d'approximation jusqu'auquel nous avons poussé nos formules, on tracera quatre lignes d'eau supplémentaires équidistantes, réparties comme l'indique la figure 6 ; comme les formules supposent que les murailles sont continues, la région comprise entre les lignes d'eau 1 et 4 devra être continue ; sur les navires ordinaires, on peut tracer la ligne d'eau supérieure à la hauteur de la partie inférieure du plat-bord.

Les formules définitives ne devront, bien entendu, être utilisées que pour les flottaisons obliques qui couperont les murailles entre les deux lignes d'eau extrêmes.

Si, au lieu de chercher la forme entière de la courbe C et de la courbe F, on voulait se borner aux inclinaisons de 25° à 30°, il y aurait avantage, au point de vue de la précision, à rapprocher les divisions de manière que les lignes d'eau extrêmes coupent les murailles aux environs de leurs intersections avec les flottaisons inclinées de l'angle considéré.

Tableau 1. — *Calcul des intégrales* A_1, A_3, A_5, A_7. — On portera, pour chaque ligne d'eau, dans la colonne disposée à cet effet les valeurs des ordonnées, de leurs cubes et de leurs 5es et 7es puissances. Des tables numériques donnant ces quantités seront publiées prochainement ; si on ne possédait pas de tables, il faudrait employer les logarithmes ; dans ce cas, on dresserait un tableau spécial pour chaque ligne d'eau ; ce tableau contiendrait, en outre des colonnes mentionnées au tableau 1, trois colonnes supplémentaires pour les logarithmes et leurs produits par 5 et par 7.

Conformément à la règle usuelle, les nombres correspondants aux ordonnées extrêmes devront être remplacés par leurs moitiés.

Règles de précision. — Les règles que nous indiquons ci-après sont déduites d'une discussion complète des erreurs trop minutieuse pour trouver place ici, les résultats auxquels on parviendra en s'y conformant seront encore d'une précision supérieure à celle que l'on peut obtenir avec les données que l'on possède :

On prendra donc :

1° Les ordonnées en centimètres ;
2° Les cubes au dixième près ;
3° Les 5es puissances en unités ;
4° Les 7es puissances en centaines.

Il sera inutile de mettre des virgules ou des zéros pour

Tableau n° 1.

	LIGNE D'EAU N° 1.				LIGNE D'EAU N° 2.				LIGNE D'EAU N° 3 (Flott.).				LIGNE D'EAU N° 4.				LIGNE D'EAU N° 5.			
	Ordonnées. (Centim.)	5es puissances des ordonnées. (Unités.)	7es puissances des ordonnées. (Centaines.)		Ordonnées. (Centimètres.)	Cubes des ordonnées. (Dixièmes.)	5es puissances des ordonnées. (Unités.)	7es puissances des ordonnées. (Centaines.)	Cubes des ordonnées. (Dixièmes.)	5es puissances des ordonnées. (Unités.)	7es puissances des ordonnées. (Centaines.)		Ordonnées. (Centimètres.)	Cubes des ordonnées. (Dixièmes.)	5es puissances des ordonnées. (Unités.)	7es puissances des ordonnées. (Centaines.)	Ordonnées. (Centimètres.)	5es puissances des ordonnées. (Unités.)	7es puissances des ordonnées. (Centaines.)	
Produits par	•	$\frac{2l}{5}$ $A_5=$	$\frac{2l}{7}$ $A_7=$		$2l$	$\frac{2l}{3}$ $A_3=$	$\frac{2l}{5}$ $A_5=$	$\frac{2l}{7}$ $A_7=$	$2l$	$\frac{2l}{3}$ $A_3=$	$\frac{2l}{5}$ $A_5=$	$\frac{2l}{7}$ $A_7=$	$2l$	$\frac{2l}{3}$ $A_3=$	$\frac{2l}{5}$ $A_5=$	$\frac{2l}{7}$ $A_7=$	•	$\frac{2l}{5}$ $A_5=$	$\frac{2l}{7}$ $A_7=$	
Sommes.	•																«			
01	$\frac{1}{2}$																			
10																				
9																				
8																				
7																				
6																				
5																				
4																				
3																				
2																				
1																				
0																				
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				

marquer la place des unités pour chaque nombre, cette rectification sera faite plus loin.

Tableau 2. — *Calcul des dérivées.* — On inscrira dans les colonnes du tableau 2 les résultats du tableau 1, en rectifiant les unités conformément aux indications inscrites en tête des colonnes du présent tableau.

Tableau 2.

	A_1 séparer deux décimales.	A_3 séparer une décimale.	A_5	A_7 ajouter deux zéros.	FORMULES pour le calcul des différences jusqu'à celles du 4e ordre.
(5)	»	»			
					$\Delta^1 = \frac{(4) - (2)}{2}$.
(4)					
					$\Delta^2 = (4) - 2 \times (3) + (2)$.
(3)					
					$\Delta^3 = \frac{(5) - 2 \times (4) + 2 \times (2) - (1)}{2}$.
(2)					
					$\Delta^4 = (5) - 4 \times (4) + 6 \times (3) - 4 \times (2) + (1)$.
(1)	»	»			

$A_1 =$ } pour la Flott. (3).
$A_3 =$ }

	Log $\Delta A_1 =$	Log $\Delta A_3 =$
	Log $h =$	Log $h =$
	diff. Log $\frac{dA_1}{dz} =$	diff. Log $\frac{dA_3}{dz} =$
$\Delta A_1 =$	Nombre =	Nombre =
$\Delta A_3 =$	Log $\Delta^2 A_3 =$	Log $\Delta^2 A_5 =$
	2Log $h =$	2Log $h =$
$\Delta^2 A_3 =$	diff. Log $\frac{d^2A_3}{dz^2} =$	diff. Log $\frac{d^2A_5}{dz^2} =$
$\Delta^2 A_5 =$	Nombre =	Nombre =
	Log $\Delta^3 A_5 =$	Log $\Delta^4 A_7 =$
$\Delta^3 A_5 =$	3Log $h =$	4Log $h =$
	diff. Log $\frac{d^3A_5}{dz^3} =$	diff. Log $\frac{d^4A_7}{dz^4} =$
$\Delta^4 A_7 =$	Nombre =	Nombre =

Les différentielles seront remplacées par les différences du même ordre; comme ces différences doivent correspondre à la flottaison (3), il faudra, pour les différences d'ordre impair, prendre les moyennes des différences correspondant aux intervalles compris entre (2) et (3) et entre (3) et (4). Ces quantités seront calculées d'après les formules indiquées sur le tableau 2; les chiffres entre parenthèses représentent les numéros des lignes d'eau auxquelles correspondent les quantités à employer; ainsi, pour le calcul de $\Delta^2 A_3$, le symbole (4) représente la quantité A_3 de la 4e ligne d'eau.

On donnera aux dérivées les signes des différences.

Tableau 3. — *Courbe des flottaisons.* — Les calculs se feront désormais sans logarithmes; on calculera les valeurs de $A_1\varrho$, $A_1\varrho_3$, d'où l'on déduira ensuite ϱ_1 et ϱ_3; ϱ_1 sera exprimé en centimètres, ϱ_3 en décimètres; on déterminera enfin les coefficients de la formule qui donne δ en fonction de φ; on pourra ainsi tracer une flottaison, isocarène avec la flottaison droite, inclinée d'un angle quelconque sur celle-ci.

Tableau 3.

Équation de la courbe des flottaisons.

$$A_1\varrho_1 = \frac{dA^3}{dz} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \qquad \varrho_1 = \text{en centimètres.}$$

$$A_1\varrho_3 = 3A_1\varrho_1 + 3\varrho_1^2 \frac{dA_1}{dz} - 6\varrho_1 \frac{d^2A_3}{dz^2} + \frac{d^3A_5}{dz^3} = \qquad \varrho_1 = \text{en décimètres.}$$

$$\delta = \frac{\varrho_1}{2}\varphi + \frac{\varrho_1 + \varrho_3}{24}\varphi^3 \qquad \text{(voir fig. 3).}$$

Bras de levier du couple de stabilité.

$$VR_1 = A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad R_1 = \text{en centimètres.}$$

$$VR_3 = 3VR_1 - 3\varrho_1^2 A_1 + \frac{d^2A_5}{dz^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R_3 = \text{en décimètres.}$$

$$VR_5 = 26VR_3 - 45VR_1 - 15\varrho_1 \frac{d^3A_5}{dz^3} + 45\varrho_1^2 \frac{d^2A_3}{dz^2} - 15\varrho_1^3 \frac{dA_1}{dz} + \frac{d^4A_7}{dz^4} \quad R_5 = \text{en mètres.}$$

$$\sin\varphi\,(H - a) = \sin\varphi\left(-a + R_1 + \frac{R_3}{6}\varphi^2 + \frac{7R_3 + 3R_5}{360}\varphi^4\right) \qquad \text{(voir fig. 5).}$$

Bras de levier du couple de stabilité. — On calculera de la même manière les valeurs de R_1, R_3, R_5, et les coefficients

de la formule définitive qui donne la valeur du bras de levier de la stabilité ; on prendra R_1 en centimètres, R_3 en décimètres et R_5 en mètres. Le résultat de la formule définitive sera exact au centimètre près.

Remarque. — Si l'on désirait vérifier les résultats de notre méthode par comparaison avec les méthodes usuelles, il ne faudrait pas perdre de vue que certains éléments peuvent varier dans de grandes limites sans que le résultat final soit affecté sensiblement ; ainsi, pour les petites valeurs de φ, la valeur de δ peut varier notablement sans que la flottaison correspondante soit déplacée sensiblement ; de même $(H - a)$ peut varier beaucoup dans les mêmes conditions sans que la longueur du bras de levier, $(H - a) \sin \varphi$, soit sensiblement altérée.

Il faudra donc ne considérer comme divergences que la distance normale des flottaisons ou les longueurs des bras de levier obtenus par les deux méthodes de calcul.

NOTE

Relative à la démonstration de M. Simart, lieutenant de vaisseau.

L'extrême simplicité des formules qui précèdent résulte de cette propriété que les coefficients du développement de r^p sont des fonctions linéaires des coefficients des développements des puissances de y en fonction de z; cette propriété fondamentale ne m'a été révélée que par l'examen attentif des résultats très compliqués auxquels m'avait conduit la méthode directe qui précède ; elle était ainsi restée sans démonstration générale ; M. Simart a comblé cette lacune par une application heureuse de la formule de Lagrange. Un nouveau mémoire relatif au même sujet, mais plus complet et établi en collaboration, a été soumis à l'examen de l'Académie des sciences qui, dans sa séance du 14 mars 1887, en a décidé l'insertion dans le *Recueil des Mémoires des savants étrangers*.

Je me bornerai à donner ci-après un aperçu de la méthode de M. Simart ; le mémoire entier sera publié ultérieurement.

Extension de la formule de Lagrange.

z étant une fonction de t définie par l'équation

$$z = \Phi(t) + tf(z) \qquad (1)$$

il s'agit de trouver le développement d'une fonction holomorphe de z, $\Pi(z)$, suivant les puissances de t; on suppose, bien entendu, que les fonctions $\Phi(t)$ et $f(z)$ sont des fonctions holomorphes.

On remarque d'abord que, pour une valeur suffisamment petite de t, il n'existe qu'une valeur de z voisine de $\Phi(0)$ satisfaisant à l'équation (1). En effet, autour du point $z = \Phi(0)$, on peut en général tracer un contour tel que, pour une valeur suffisamment petite de t, le module de

$$\frac{tf(z)}{z - \Phi(t)}$$

soit plus petit que 1, le point $\Phi(t)$ restant dans ce contour. Cela étant, on trouvera, en suivant une marche identique à celle adoptée par M. Hermite pour démontrer la formule de Lagrange, la formule suivante :

$$\Pi(z) = \Pi(z)_{z=\Phi(t)} + \sum_0^\infty \frac{t^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n+1} \left[D_z^n \left[\Pi'(z) f^{n+1}(z) \right] \right]_{z=\Phi(t)},$$

d'où, en faisant

$$\Pi(z) = \frac{f^p(z)}{p}$$

$$\frac{1}{p} f^p(z) = \frac{1}{p} \left[f^p(z) \right]_{z=\Phi(t)} + \sum_0^\infty \frac{t^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \left[D_z^n \frac{f^{n+p}(z)}{n+p} \right]_{z=\Phi(t)}. \qquad (2)$$

Application à la recherche du développement des puissances de r.

Des formules (6) du § 1er on tire, en posant : $\operatorname{tg} \varphi = t$.

$$z = (\varsigma - \eta t) + yt. \qquad (3)$$

On peut considérer $\varsigma - \eta t$ comme une fonction $\Phi(t)$, et

par conséquent développer $\frac{y^p}{p} = \frac{f^p(z)}{p}$, par la formule (2) suivant les puissances de t; on a ainsi :

$$\frac{y^p}{p} = \frac{f^p(\varsigma - \eta t)}{p} + \sum_0^\infty \frac{t^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \left[D_z^n \frac{f^{n+p}(z)}{n+p} \right]_{z=\varsigma-\eta t},$$

c'est-à-dire

$$\frac{y^p}{p} = \frac{y_0^p}{p} + \left(\frac{\varsigma - \eta t}{p}\right)\left(\frac{dy^p}{dz}\right)_0 + \frac{(\varsigma - \eta t)^2}{1 \cdot 2 \cdot p}\left(\frac{d^2 y^p}{dz^2}\right)_0 + \ldots$$

$$+ \frac{t}{1}\left[\frac{1}{p+1}\left(\frac{dy^{p+1}}{dz}\right)_0 + \frac{\varsigma - \eta t}{p+1}\left(\frac{d^2 y^{p+1}}{dz^2}\right)_0 + \ldots\right] + \ldots\ldots \quad (4)$$

$$+ \frac{t^n}{1 \cdot 2 \ldots n}\left[\frac{1}{p+n}\left(\frac{d^n y^{p+n}}{dz^n}\right)_0 + \frac{\varsigma - \eta t}{p+n}\left(\frac{d^{n+1} y^{p+n}}{dz^{n+1}}\right)_0 + \ldots\right]$$

$$+ \ldots\ldots$$

On conclut de cette formule (4), en supposant $(\varsigma - \eta t)^k$ et t^k remplacés par leurs développements suivant les puissances de φ, que les coefficients des puissances de φ dans le développement de y^p sont des fonctions linéaires de termes de la forme

$$\frac{1}{j}\frac{d^i y^j}{dz^i}.$$

En outre, si l'on remarque que r^p est donné par la formule

$$\frac{r^p}{p} = \left(\frac{y - \eta}{p}\right)^p \frac{1}{\cos^p \varphi} \quad (5)$$

on voit aussi que les coefficients des diverses puissances de φ dans le développement de r^p jouissent de la même propriété.

Cela établi, M. Simart donne, sous forme de déterminants très simples, les expressions des coefficients des différents développements auxiliaires nécessaires au développement de la formule (5).

TRAITÉ

DES

ÉVOLUTIONS ET ALLURES[1]

par M. le contre-amiral MOTTEZ

Les considérations qui guident le manœuvrier dans une évolution dépendent en majeure partie de l'état du temps; quand le temps est beau et la mer peu houleuse, le manœuvrier tâche d'évoluer vite et sûrement; quand le vent est fort, la conservation des voiles tient une grande place dans ses préoccupations; enfin, quand la mer est dangereuse, il a en vue de préserver le navire du choc des lames.

Avant d'entrer dans le détail des évolutions, il est bon de poser les principes sur lesquels toutes les évolutions s'appuient, c'est-à-dire de faire connaître les différentes impulsions évolutives que reçoit le bâtiment dans le cours d'une évolution. Il y en a de deux sortes : celles imprimées par les voiles et celles qui résultent des modifications des pressions de la carène de la part de l'eau, suivant les mouvements imprimés au bâtiment. Les premières se voient; on sait que l'effort du vent sur une voile a pour direction la normale à la voile; de façon qu'en voyant agir une voile, on voit par le fait la force qui sollicite le bâtiment; on la voit en direction par

1. Ce traité fut publié pour la première fois en 1873, par M. Mottez, alors capitaine de vaisseau, après qu'il eut quitté le commandement de l'École d'application des aspirants établie sur le vaisseau le *Jean-Bart*. Il est rédigé sous la forme d'un exposé d'un mode rationnel d'enseignement de la manœuvre.