tud total de la cadena es ordinariamente de 10 ó de 20 metros. También las hay de metal de estas dimensiones; unas y otras tienen estuches de cuero para el transporte.

Acompaña á la cadena un juego de diez agujas formadas del mismo alambre que la cadena, y de una longitud variable de $0^m,35$ á $0^m,40$, y de $0^m,004$ de diámetro, aguzadas por un extremo, y terminadas en el otro por una anilla de $0^m,03$ á $0^m,04$ de diámetro.

60. *Verificaciones y correcciones de la cadena.*—El uso hace que la cadena aumente de longitud, por alargarse las anillas que unen los eslabones, ó disminuya encorvándose éstos por los golpes que suelen recibir; variando también en virtud de las influencias atmosféricas.

Para comprobar su longitud se marca con toda precisión en un terreno llano, y mejor en el suelo ó en un muro de un edificio, la longitud exacta que deba tener la cadena, y se compara ésta de cuando en cuando con el marco ó patrón establecido. Para corregirla si ha aumentado de longitud, se cerrarán bien las anillas que unen los eslabones, y si no es suficiente se encorvarán ligeramente uno ó algunos de éstos. Si ha disminuído la longitud, se recorrerán todos los eslabones para rectificar los que hayan podido torcerse.

61. **Uso de la cadena.**—Para medir una línea AB (fig. 22, lám. 1) que supondremos en un terreno llano y próximamente horizontal, son necesarios dos peones; después de contadas las agujas, rectificada la cadena y quitados todos los nudos que se suelen formar al extenderla, cogen los dos peones la cadena por sus agarraderos, colocándose todo lo posible en la alineación; para lo cual el más inteligente, que marchará detrás dirigiendo la medida, después de haber entregado al otro las diez agujas, coloca el extremo de la cadena en el punto A, y hace señas al segundo para que éntre en la línea: bien tendida la cadena horizontalmente, el segundo peón clava verticalmente en el terreno una aguja que enrase con el extremo de aquélla.

Hecho esto, y levantando ambos la cadena con el objeto de no tropezar á la aguja, dan un paso á derecha ó izquierda de la línea, y siguen marchando en dirección de aquélla hasta que el primer peón llega á la aguja clavada; entonces coloca el agarradero de la cadena de modo que enrase con ella, y teniendo cuidado de no moverla, hace entrar en línea al segundo peón; clava éste la segunda aguja, como hemos dicho, y cogiendo el primer peón la primera, teniendo siempre cuidado de no cogerla hasta que el otro haya puesto la suya, se continuará la operación de la misma manera, hasta que el segundo peón haya clavado las diez agujas, cuidando de no levantar la última para no perder el punto donde concluye la medida; el primer peón al llegar á esta última aguja la levanta y marca bien el punto donde estaba en el terreno, clavando en él una estaquilla delgada de madera que lleva á la mano ó haciendo con la última aguja que ha levantado una cruz bien perceptible en el terreno cuya intersección coincida exactamente con el punto donde estaba clavada dicha aguja. Hecho esto, y cerciorado el primer peón que tiene recogidas las diez agujas, resultará que según que la cadena sea un decámetro ó dos, se habrán medido uno ó dos hectómetros.

El primer peón apunta en un cuaderno la medida, entrega después al segundo las diez agujas, y se repite de nuevo la operación explicada, hasta llegar al extremo B de la línea. En la última *tirada* ó *cadenada*, después de contadas las agujas recogidas por el primer peón, se verá el número de eslabones comprendidos entre la última y otra que el segundo peón clava donde termina la línea, para añadir al número de hectómetros los decámetros, metros y dobles decímetros que resulten. Si además hubiese una fracción de eslabón, se apreciaría por medio de un *doble decímetro de metal.*

La importancia que la medición de las líneas tiene en las operaciones topográficas, exige que la cadena esté siempre bien tirante, perfectamente alineada y que se lleve mucho cuidado con la cuenta de las *cadenadas*, contando también de tiempo en tiempo las agujas; pues la pérdida de una de ellas anularía la medida de toda la alineación.

62. *Ejemplo de una medición.*—Supongamos que en la medida de una línea se haya empleado la cadena de la longitud de un decámetro; que el peón que va detrás haya recogido y apuntado cuatro veces las diez agujas, y que al final tenga tres, habiendo además una fracción de cadena compuesta de cuatro eslabones y una parte de eslabón valuada en $0^m,13$; resultará para el valor de la línea

$$100^m \times 4 + 10^m \times 3 + 0^m,2 \times 4 + 0^m,13 = 430^m,93.$$

63. *Medida de las rectas inclinadas.*—Puede obtenerse midien-

do según la inclinación de la recta dada AD (fig. 23, lám. 1), aplicando la cadena al terreno, pero debe reducirse después á su proyección A'D. Puede también obtenerse desde luego esta proyección disponiendo horizontalmente la cadena según A*b*, y bajando desde *b* una plomada ó dejando caer verticalmente una aguja, se determina el punto B en que termina la porción AB de la recta inclinada, que se proyecta horizontalmente según A*b* ó su igual A'B'; repitiendo la misma operación desde B, se determinará igualmente la proyección B'C' de BC. La suma de las proyecciones que resulten será la total A'D que se trataba de conocer.

Cuando la pendiente es muy rápida ó se quiere evitar el error que proviene del pandeo de toda la cadena, se emplea una fracción de ella en la medición indicada.

64. **Cinta metálica.**—Es un resorte de acero empavonado, de la longitud de 10 ó de 20 metros, siendo su ancho de $0^{m},016$, y su grueso y temple tales que se la pueda arrollar con facilidad para el trasporte, no presentando inflexiones ni dobleces cuando hay que extenderla para hacer uso de ella. Se hallan señalados los metros con discos *l* (fig. 24, lám. 1) de metal amarillo, de $0^{m},015$ de diámetro, unidos á la cinta, siendo sus centros, que se hallan bien marcados, los puntos de división; para señalar los dobles decímetros lleva otros discos *e* de $0^{m},008$ de diámetro, y los decímetros se marcan también por medio de unos agujeros pequeños *d* taladrados en la misma cinta y de $0^{m},002$ de diámetro. Una plancha *s* en figura de rombo indica con la intersección de sus diagonales, que debe estar bien marcada, el punto medio de la cinta.

El agarradero (*m, m'*) en que termina por cada uno de sus extremos, forma parte del último doble decímetro, de modo que la longitud total de la cinta, inclusos los agarraderos, es la que le hemos asignado desde luego. En las caras extremas de estos agarraderos, y en sentido de su longitud y latitud, lleva dos canales semicilíndricas perpendiculares entre sí, y cuyo diámetro es igual al de las agujas que acompañan también á la cinta. La longitud del primer doble decímetro se hace variable por medio de un tornillo de paso muy pequeño que une el agarradero con la cinta, y que se puede fijar invariablemente cuando se quiera por medio de una tuerca *t*.

65. *Uso, verificaciones y correcciones.*—Se verifica como la cadena (60), comparando su longitud con el patrón elegido de antemano, y se corrige por los tornillos, alargando ó acortando, se-

gún convenga, los dobles decímetros extremos, y apretando después fuertemente las tuercas.

El uso de la cinta es el mismo que el de la cadena, ajustando las canales de los agarraderos á la aguja, para evitar el error que por el grueso de esta última resutta en la medida cuando se hace uso de la cadena.

66. **Rodete.**—Es una cinta de hilo, de longitud variable, barnizada y dividida en metros, decímetros y centímetros, con la expresión de los números que indican las divisiones de los metros y decímetros. El primer decímetro se halla dividido en milímetros, y antes de él hay un pequeño trozo que está en blanco y termina por una sortija de metal. La cinta está arrollada dentro de una caja cilíndrica de cuero (*c, c'*) (fig. 25, lám. 1), alrededor de un eje metálico *e*, que pasa por el centro de la caja y lleva en su extremo un pequeño manubrio (*m, m'*), el cual sirve para arrollar la cinta, introduciéndola en la caja por una abertura lateral que presenta el canto de la misma, sirviendo para desarrollarla la anilla (*a, a'*), que no puede pasar por la abertura.

Esta unidad de medida se emplea lo mismo que la cadena y cinta de acero: es más cómoda, pero tiene grandes inconvenientes por su poca duración, sus más frecuentes variaciones en sentido longitudinal, y la imposibilidad de usarla en terrenos algo húmedos, que quitándola el barniz y borrando la numeración, la inutilizan por completo.

67. **Cuerda métrica.**—En la medida de las líneas puede hacerse uso de una cuerda de cáñamo de 20 á 25 metros de longitud, y á fin de que sea invariable y no se acorte con la humedad, se prepara torciendo sus hebras hacia distintos lados, sumergiéndola en un baño de aceite hirviendo, pasándola por cera derretida después de seca, y encerándola bien por último. Puede usarse después con toda confianza, pues así preparada no se contrae, aun cuando permanezca un día entero dentro del agua. Las divisiones que han de marcar los metros se obtienen cosiendo trozos de cinta blanca, en los que se marcan los números correspondientes.

68. **Reglones.**—Los reglones que se usan para la medida de líneas de poca extensión, tienen la forma octogonal, como se ve en la figura 26 (lám. 2); su longitud es de 4 metros, y se hallan divididos en decímetros. En sus extremos llevan unas rodajas de hierro *r* con una ranura en sentido de su diámetro, para colocar

el hilo de la plomada. Se puede tender una cuerda á lo largo de la línea, que debe estar señalada por jalones para que sirva de guía en la medición, y dos peones la ejecutan con dos reglones iguales. Para esto colocan en el punto de partida A (fig. 27, lám. 1) el extremo del primer reglón; uno de los peones le mantiene fijo en esta posición, y hace que el otro le coloque sobre la línea con el auxilio de uno de los jalones que la señalan; colocado este primer reglón, toman el segundo y le colocan del mismo modo á continuación del primero, procurando no tocar á éste y poniéndole cuidadosamente en contacto con él. Se levanta después el primero para colocarle del mismo modo á continuación del segundo, que queda fijo, y así se continúa hasta llegar al extremo B de la línea.

En los terrenos inclinados se mide la AB (fig. 28, lám. 2) valiéndose de las agujas (fig. 29, lám. 1) ó de la plomada, y del nivel de aire, que se coloca encima de los reglones.

69. **Reducción de las distancias al horizonte.**—La distancia de un punto A (fig. 30, lám. 1) á otro B, medida con la inclinación que tiene la recta AB que los une, debe reducirse, como hemos dicho (40), á su proyección horizontal. Suponiendo el plano horizontal que pasa por A, y bajando desde B una perpendicular á él, el pie C de esta perpendicular será la proyección de B, y la horizontal AC la proyección de AB. En el triángulo rectángulo ABC tenemos entonces

$$AC = AB \cos. A.$$

Llamando l á la distancia medida, x á su proyección y p al ángulo A, que AB forma con el horizonte, y que es por lo tanto (Acots., 25) la pendiente de AB, la fórmula anterior se convertirá en

$$x = l \cos. p \qquad [2]$$

Sea $l = 120^{m},4$ y $p = 10^{\circ}\ 26'$; se tendrá

$$x = 120^{m},4 \times \cos.\ 10^{\circ}\ 26' = 118^{m},41,$$

apreciando hasta centímetros.

Cuando se hace uso de las líneas trigonométricas naturales, suele tomarse el coseno con cuatro ó cinco cifras decimales, aumentando una unidad á la del último órden decimal cuando la siguiente es 5 ó mayor que 5.

70. Para la reducción de las distancias al horizonte, se ha calculado también haciendo uso de la fórmula [2] (69) una tabla que

insertamos á continuación, y que da la distancia á que se reduce la longitud constante de 100 metros para las pendientes de grado en grado desde 0° hasta 45°.

TABLA

DE REDUCCIÓN AL HORIZONTE DE UNA LONGITUD DE 100 METROS PARA LAS INCLINACIONES QUE VARÍAN DE GRADO EN GRADO DESDE 0° HASTA 45°.

GRADOS DE INCLINACIÓN.	DISTANCIA REDUCIDA.	GRADOS DE INCLINACIÓN.	DISTANCIA REDUCIDA.	GRADOS DE INCLINACIÓN.	DISTANCIA REDUCIDA.
1	99,985	16	96,126	31	85,717
2	99,940	17	95,631	32	84,805
3	99,863	18	95,106	33	83,867
4	99,757	19	94,552	34	82,904
5	99,619	20	93,969	35	81,915
6	99,452	21	93,358	36	80,902
7	99,255	22	92,718	37	79,863
8	99,027	23	92,051	38	78,801
9	98,769	24	91,354	39	77,347
10	98,481	25	90,631	40	76,604
11	98,163	26	89,881	41	75,470
12	97,815	27	89,101	42	74,314
13	97,437	28	88,295	43	73,135
14	97,030	29	87,462	44	71,934
15	96,593	30	86,600	45	70,710

Esta tabla no pasa de 45°, pues hasta este límite alcanzan las pendientes que el terreno presenta más comúnmente.

También se observa que á medida que la pendiente aumenta, disminuye la longitud de la proyección de la recta dada.

71. Para el uso de esta tabla distinguiremos dos casos:

1.° *Que la pendiente dada sea un número exacto de grados.*

2.° *Que esté expresada en grados y minutos.*

Si tenemos, por ejemplo, $l = 120^{m},4$ y $p = 10^{\circ}$, observaremos que siendo las distancias reducidas proporcionales á las distancias medidas, para una misma pendiente, hallaremos el valor de x para el ángulo de 10°, estableciendo la proporción general

$$100 : 98,481 :: l : x; \qquad \text{de donde resulta}$$

$$x = \frac{98,481 \times l}{100} = 0,98481 \times 120^{m},4 = 118,^{m}571124.$$

En el segundo caso se empleará la proporción anterior, después de haber calculado la proyección de 100 metros para el ángulo dado.

Si suponemos, pues, $l = 120^{m},4$, y $p = 10^{\circ}\ 26'$, admitiremos que las diferencias de los ángulos son proporcionales á las diferencias de las proyecciones para la longitud constante de 100^{m}; principio que no es exacto, pero que puede admitirse en la práctica sin error sensible. En su consecuencia, hallaremos la diferencia 0,318 que existe entre las proyecciones de dicha longitud constante, correspondientes á las inclinaciones de 10° y 11°, que comprenden en las tablas á la inclinación dada 10° 26′, y llamando z á la diferencia entre la proyección correspondiente á 10°, que dan las tablas, y la que resulta para 10° 26′, hallaremos su valor por medio de la proporción

$$60' : 0,318 :: 26' : z = 0,1378.$$

Siendo esta cantidad la diferencia entre la reducida de 10° que conocemos, y la de 10° 26′ que se busca, y debiendo ser ésta menor, restaremos 0,1378 de la reducida correspondiente á 10°, y obtendremos 98,343 para la que corresponde á 100 metros con la pendiente de 10° 26′.

72. Cuando no se conoce la pendiente y sí el desnivel $BC = d$ (fig. 30, lám. 1) entre los extremos de la recta, se tendrá en el triángulo rectángulo ABC

$$x = \sqrt{l^2 - d^2} \qquad [3].$$

Para la aplicación de esta fórmula se emplean ventajosamente las tablas de cuadrados de los números enteros desde 1 á 1000 que se publican en París todos los años en el *Carnet de l'Ingenieur*. También son muy útiles las tablas de reducción de D. Jacinto La Rua.

73. **Transportación de las líneas.—Escalas.**—Debiendo ser el plano una figura semejante al polígono considerado en el terreno (40), los ángulos del plano serán iguales á los que se midan en el terreno, pero los lados de ambos polígonos serán proporcionales, por lo que se tendrá en la fig. 14 (lám. 1) la serie de razones iguales

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{b'c'}{bc} = \frac{c'd'}{cd} = \dots\dots\dots = \frac{m}{M} \qquad [4],$$

representando por M la unidad de medida empleada para las líneas del terreno, y por m la magnitud adoptada para representar á M en el plano.

74. **Escala numérica.**—La *razón numérica* $\frac{m}{M}$, expresión constante de la relación que existe entre una linea gráfica cualquiera y su homóloga en el terreno, se llama *escala numérica* ó simplemente *escala*.

Esta relación puede ser inconmensurable cuando se toma para m una magnitud arbitraria; pero es más conveniente que sea conocida su relación con M. Tomando, por ejemplo, un decímetro para representar en el plano al metro tomado como unidad para las líneas del terreno, la relación será

$$\frac{m}{M} = \frac{0,1}{1} = \frac{1}{10},$$

que se llama *escala* de 1 por 10.

Las relaciones $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ..... son también las *escalas decimales de* 1 *á* 100, *de* 1 *á* 1000..... é indican del mismo modo que la magnitud real de un metro tomada en el plano representa 100, 1000..... metros en el terreno.

Las fracciones $\frac{1}{250}$, $\frac{3}{5}$ ..... son también escalas. En la primera de ellas el metro en el plano representa 250 del terreno; y respecto á la segunda es preciso concebir al metro dividido en cinco partes iguales, y que de ellas se han tomado tres para representar la unidad lineal en el plano.

75. Concretándonos á las escalas generalmente adoptadas, que son las que tienen por numerador la unidad, y de preferencia á las decimales, y llamando l á la magnitud real de una recta cualquiera del plano, L á su homóloga en el terreno, y M al denominador de la escala, la serie [4] (73) nos dará la proporción

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{M} \qquad [5],$$

de la que se deducen las igualdades

$$l = \frac{L}{M} \qquad [6], \qquad y \qquad L = lM \qquad [7].$$

Estas igualdades nos sirven para determinar la magnitud real de una línea cualquiera del plano, conocida su homóloga del terreno y el denominador de la escala; y recíprocamente, la línea del terreno, conocida su homóloga gráfica.

Ejemplo 1.º—Averiguar la longitud de una *línea gráfica*, sabiendo que su homóloga *natural* vale 236 metros, y que la *escala* es de $\frac{1}{1000}$. La fórmula [6] nos da el valor

$$l = \frac{236}{1000} = 0^{m},236.$$

Ejemplo 2.º—Averiguar la longitud de una *línea natural*, sabiendo que su homóloga *gráfica* vale 0^{m},236 en la misma escala.

La fórmula [7] nos da

$$L = 0,236 \times 1000 = 236 \text{ metros}.$$

76. **Escalas gráficas.**—La expresión gráfica de la *escala* (73) se obtiene dividiendo una recta en partes iguales, que representan la unidad de medida adoptada para las rectas del terreno y que se hallan con ésta en la razón numérica adoptada. Por medio de la escala gráfica se pueden apreciar con el auxilio del compás las distancias del plano.

La construcción de una escala exige el conocimiento de la magnitud real que ha de representar en el plano la unidad lineal adoptada para las rectas del terreno. Para hallar en general esta magnitud dada la escala $\frac{m}{M}$, se dividirá la magnitud real del metro en M partes iguales, y se tomará el número *m* de ellas para la unidad lineal en el plano. En las escalas decimales se pondrá en forma de entero la razón numérica dada, y se obtendrá:

$$\frac{1}{10} = 0,1; \quad \frac{1}{100} = 0,01; \quad \frac{1}{250} = 0,004; \quad \frac{1}{1000} = 0,001:$$

lo que da á entender en el primer caso, que el tamaño natural de un decímetro en el papel representa un metro del terreno; en el segundo caso que un centímetro en el papel representa un metro en el terreno; en el tercero, que 4 milímetros representan un metro, y así sucesivamente.

Conocida esta magnitud, nada más fácil que la construcción de la escala.

Para construir, por ejemplo, la escala de $\frac{1}{1000}$, se formarán las equivalencias siguientes de las rectas del plano y del terreno:

1^{m}	1000;
0^{m},1	100;
0^{m},01	10;
0^{m},001	1;

y marcando con *cero* el punto A (fig. 31, lám. 2) de una recta indefinida, se toma la magnitud AB de un decímetro exacto para representar 100 metros: repitiendo de B á la derecha esta magnitud se tendrían los hectómetros de la escala. Dividiendo cada uno de ellos en 10 partes iguales se tendrán los decámetros, que se señalarán con los números 10, 20, 30..... Tomando por último un centímetro de A á C y dividiéndole en 10 partes iguales, se obtendrán, según las equivalencias que preceden, los metros de la escala, cada uno de los cuales tendrá la magnitud real de un milímetro.

77. La construcción de las escalas decimales se facilita mucho con el uso del papel cuadriculado, dividido en decímetros, centímetros y milímetros. También se emplean con este objeto los *dobles decímetros* divididos que acompañan á los estuches de matemáticas, y las *escalas de metal*, *de boj* ó *de marfil*.

78. **Escala de transversales.**—Cuando se quiere llevar la apreciación de las distancias más allá de lo que permite la escala gráfica descrita, se empieza por construir ésta sobre una recta AB (fig. 32, lám. 2), después de determinar como hemos dicho (76) la magnitud de 2^{cm} que corresponde á 100 metros para la escala de 1 á 5000, y levantando en los puntos A y B perpendiculares á la AB, se llevará sobre ellas á partir de los mismos puntos A y B diez veces una magnitud arbitraria, y se unirán los últimos puntos de división C y D, por medio de una recta CD, la cual se dividirá del mismo modo que la AB. Se tiran después paralelas á la AB por los puntos de división de las AC y BD que se numeran, y también se trazan por último transversales desde los puntos de división de la parte CR á los de la AM, como se ve en la figura. Por el empleo de las transversales se aprecian exactamente en esta escala hasta los metros que comprende una distancia cualquiera.

Para mayor inteligencia en la construcción, demostración y uso de las escalas ordinarias y de transversales, véanse los párrafos 16, 17 y 18 de nuestro *Tratado de Acotaciones*.