

### CAPITULO III.

#### ÁNGULOS Y SU MEDIDA.

79. **Clasificación de los ángulos.**—Los tres puntos que determinan un ángulo y el plano donde se halla, á saber: el vértice y un punto de cada lado, pueden hallarse situados en un plano *horizontal, vertical ó inclinado*. Los *ángulos horizontales* reciben el nombre de *ángulos azimutales*; los que están situados en planos verticales el de *ángulos verticales*, y los que se hallan en planos inclinados se llaman *ángulos inclinados*, ó más bien *ángulos situados en el plano de los objetos*, por ser este caso el que con más frecuencia se presenta.

80. Los ángulos azimutales y los rumbos se cuentan generalmente á partir de una recta cualquiera dada de posición, desde  $0^\circ$  á  $360^\circ$ , determinando así por un valor angular perfectamente definido la dirección de cada una de las rectas, que pueden considerarse en una *vuelta entera de horizonte* alrededor del punto de observación. Los ángulos azimutales así determinados se llaman *ángulos de dirección*. El valor del ángulo de dos de las rectas consideradas se obtiene hallando la diferencia de sus correspondientes ángulos de dirección.

81. Los ángulos situados en planos verticales se llaman *ángulos de elevación ó altura* cuando se refieren á la horizontal OM (figura 33, lám. 2) del vértice O y el otro lado ON va por encima de ella, como el NOM. El ángulo MOP, que forma con la misma horizontal la visual tirada al punto inferior P, es un *ángulo de depresión*.

El ángulo ZON, que forma la visual ON con la vertical ZO, y

que es complemento del ángulo de elevación MON, se llama *ángulo zenital*.

Si quisiéramos referir la dirección de la visual OP á la vertical OZ, la determinaríamos por el ángulo ZOP, cuyo exceso sobre el ángulo ZOM es el ángulo de depresión MOP.

Observaremos que para referir á la vertical un ángulo de elevación MON, basta restarle de  $90^\circ$ , y resultará el ZON; y si el ángulo es el de depresión MOP, se deben añadir  $90^\circ$  á su valor para obtener el ZOP.

82. Si cuando los lados del ángulo no tienen las posiciones indicadas movemos el plano sobre que insiste la alidada, hasta tanto que los extremos de los lados de dicho ángulo se hallen en la prolongación del mismo plano, el ángulo resultará determinado en el plano de los objetos.

83. **Instrumentos para la medida de los ángulos.**—Antes de tratar de cada uno de ellos en particular, describiremos por separado cada una de las partes que los componen.

84. **Partes principales de los instrumentos.**—**Limbos.**—Se da el nombre de *limbo* en todo instrumento angular á un disco metálico, ó á la superficie lateral de un tronco de cono de muy poca altura, destinados á contener la división geométrica que sirve para la apreciación de los grados y fracciones de grado de un ángulo dado AOM (fig. 34, lám. 2).

Los limbos que acompañan á algunos instrumentos son semicirculares, y en algunos sólo comprenden la sexta, octava... parte del círculo, y se llaman *sextantes, octantes...*

85. **Diferentes graduaciones de los limbos.**—Los limbos están generalmente arreglados á la división *sexagesimal*, ó sea divididos en 360 grados y cada grado en dos ó en tres partes iguales, siendo  $30'$  ó  $20'$  los correspondientes límites de apreciación angular que proporcionan. En algunos instrumentos se extiende á  $10'$ , estando el grado dividido en seis partes.

El sentido de la graduación es en general de *izquierda á derecha*, y algunas veces presenta la dirección contraria ó ambas; y se refiere á la lectura de la numeración á partir del cero y suponiendo que se observa desde el centro del limbo. Esta numeración señala los grados de diez en diez; las divisiones que entre las numeradas corresponden á los cinco grados van señaladas con un trazo más largo que las que indican las demás; siendo menores aún las que señalan las fracciones de grado.



Los limbos semicirculares están á veces numerados de manera que presentan la graduación completa, repitiendo la numeración á partir desde el cero y en el mismo sentido, con los números 180, 190, 200...

86. **Alidadas.**—Se da el nombre de *alidada* á la parte de un instrumento destinada á determinar la dirección de la visual, en las distintas posiciones que deben ocupar las rectas que determinan los ángulos en el terreno (40).

Las alidadas son *fixas* cuando ocupan una posición invariable con relación á las demás partes del instrumento que entran á constituir, y en los demás casos *variables* ó *giratorias*, y pueden ser de varias clases.

87. **Alidada de pínulas.**—Se compone de una regla de metal AB (fig. 35, lám. 2), ordinariamente de 0<sup>m</sup>,55 de longitud, en cuyos extremos se elevan perpendicularmente á ella otras dos reglas P, P', cuya altura suele ser 0<sup>m</sup>,2, llamadas *pínulas*, las cuales se hallan unidas á la AB por las charnelas *c* y *c'*. Unas clavijas *t* y *t'* sirven para mantener las pínulas en la posición perpendicular á la regla AB, oprimiendo los rebordes *a*, *a'* en que terminan.

Dando un cuarto de revolución á las clavijas, dejan de oprimir los rebordes respectivos, y entonces las pínulas pueden unirse á la regla AB, doblándolas por las charnelas *c*, *c'*. En esta disposición se prestan á encerrarse cómodamente en una caja rectangular, lo que facilita el transporte de la alidada.

Las pínulas tienen por objeto determinar la dirección de las visuales que deben tirarse á los extremos de los lados de los ángulos que se han de medir; para lo cual, cada una de ellas presenta una hendidura longitudinal bastante estrecha, *e*, *e'* y un rectángulo vaciado *r*, *r'* y dividido en dos partes iguales por una cerda, la cual se halla en prolongación de la hendidura practicada en la misma pínula, de manera que ambas forman una misma recta.

El rectángulo *r* de una de las pínulas corresponde á la hendidura *e'* de la otra, y el *r'* de ésta á la hendidura *e* de la primera.

Para dirigir las visuales se toma siempre como *ocular* la hendidura de la pínula que se halla del lado del observador, y como *objetivo* la cerda que se le opone en la otra pínula.

Las pínulas deben tener bastante altura para distinguir los puntos muy elevados ó muy deprimidos con respecto al plano de la regla. Esta debe ser más estrecha en la parte *mn*, hacia la cual presenta un canto rebajado, con objeto de trazar cómodamente

por ella líneas de lápiz sobre el plano en que la alidada debe insistir, cuando se hace uso de ella para la medida de los ángulos.

La recta determinada por la hendidura y la cerda de cada una de las pínulas debe ser perpendicular al plano de la regla. De aquí se deduce que ambas son paralelas y determinan un plano, perpendicular también al de la regla, llamado *plano de colimación*, el cual debe contener á la recta *mn*, llamada también *línea de fe* ó *de colimación*.

El canto rebajado de la regla suele tener grabada una escala, y á muchas alidadas acompaña un nivel de aire fijo á la regla AB para que se la pueda dar la posición horizontal (29).

88. **Verificaciones y correcciones de la alidada de pínulas.**—1.<sup>a</sup> Que el canto *mn* de la regla sea una línea recta (Geom., 33).

2.<sup>a</sup> Que las cerdas de las pínulas sean perfectamente verticales cuando la regla AB está sobre un plano horizontal (29). Basta observar si cubren á la vez exactamente al cordón de una plomada en su posición de equilibrio.

3.<sup>a</sup> Que el plano de colimación (87) tenga por traza sobre el plano de la regla la línea de fe *mn*. Se observa si la visual pasa á la vez por las cerdas y el cordón de una plomada distante en dos posiciones opuestas de los extremos de la regla, en las cuales coincide la recta *mn* con otra trazada previamente en el plano horizontal en que insiste la alidada. De no suceder así, existe un *error de colimación* que no influye en la determinación gráfica de los ángulos, siempre que se tenga cuidado de señalar una de las pínulas para que sirva constantemente de ocular, como veremos más adelante.

89. Cuando la alidada no cumple con todas las verificaciones á que debe satisfacer, es necesario recurrir á un constructor si ha de emplearse ventajosamente el instrumento en las operaciones sucesivas.

90. **Anteojo astronómico.**—El anteojo astronómico es un instrumento de óptica destinado á producir la imagen perfectamente determinada de un objeto lejano. Se compone de un tubo cilíndrico A (fig. 36, lám. 2), en el cual entra á frotamiento otro tubo B, que lleva una lente convergente *o*, llamada el *ocular* del anteojo. Este segundo tubo, abierto por uno de sus extremos, está cerrado por el otro por medio de una placa en la que hay practicado un taladro *a*, por el cual se dirigen las visuales.



Otro tubo C, provisto de una lente acromática O, que se llama *objetivo*, por hallarse del lado de los objetos que se miran, puede moverse á lo largo del tubo A para hacer variable la distancia entre las lentes.

El movimiento del tubo C se verifica por el tornillo exterior M, que lleva en el eje un piñón *m*, cuyos dientes engranan con los de una barra dentada *b* unida al tubo C.

El interior de los tubos está recubierto de un barniz negro y mate, con objeto de que sea absorbida la luz que llega á él y no haga confusas las imágenes. Al extremo del tubo C suele adaptarse á frotamiento una pieza cilíndrica, que impide á la luz solar herir al objetivo, molestando la vista del observador é impidiendo la percepción distinta de las imágenes.

91. **Retículo.**—El *retículo*, cuya sección en sentido del eje del anteojo está representada en *r*, se compone de una pieza metálica circular *a* (fig. 37, lám. 2) con un taladro concéntrico, en el cual y en la dirección de dos diámetros perpendiculares entre sí, se hallan colocados dos hilos metálicos sumamente delgados, ó bien dos hilos de tela de araña ó filamentos de seda. Estos hilos se llaman *cerdas* ó *hilos del retículo*.

La pieza *a* puede moverse con los hilos lateralmente, aflojando uno de los tornillos *t* y apretando el opuesto; y de un modo análogo puede subir ó bajar por medio de los *t'*. Todos estos tornillos tienen sus tuercas en el tubo *b* del anteojo, que con este objeto suele ensancharse á las inmediaciones del retículo.

Muchos retículos modernos tienen sólo un tornillo lateral; ocupando el lugar del otro un resorte, que oprimido cuando se aprieta el tornillo, obra por su fuerza elástica moviendo la pieza *a* cuando el tornillo se afloja. El inferior *t'* está sustituido análogamente por otro resorte.

92. **Distancia variable entre el ocular y el objetivo.**—**Tiro del ocular.**—La aplicación del anteojo á las operaciones topográficas exige que la imagen del objeto se obtenga con toda claridad, y que se forme exactamente en el plano del retículo. La primera circunstancia se obtiene (90) por el movimiento del tornillo que hace correr al tubo del objetivo y coloca á esta lente á la distancia conveniente del ocular, la segunda por lo que se llama *tiro del ocular*, el cual varía con la vista del observador, pero en los límites ordinarios es independiente de las distancias variables á los distintos puntos que se observen. Cuando la imagen *ab* (figu-

ra 38, lám. 2) no se forma en el plano R del retículo, las visuales tiradas desde los puntos *o*, *o'*, *o''* situados delante del taladro que tiene el tubo T del ocular, presentan al cruzamiento C de las cerdas del retículo cubriendo sucesivamente á los puntos *m*, *h*, *h'* de la imagen. Cuando por el tiro del ocular coincide *ab* con R, el punto C cubrirá al *m* en todas las posiciones del ojo del observador.

93. **Eje óptico del anteojo.**—**Dirección de la visual.**—*Eje óptico* del anteojo es el eje principal común á ambas lentes, y contiene en su prolongación al punto del objeto observado, cuya imagen se forma en él. El eje óptico coincide sensiblemente con el de figura del tubo del anteojo, y es la recta que determina la *dirección de la visual*, que se emplea en las observaciones topográficas.

94. **Centración del retículo.**—Para la determinación exacta de la visual es indispensable que el cruzamiento de las cerdas del retículo se halle precisamente en el eje óptico (93). Si por el contrario se halla en la posición *a* (fig. 39, lám. 2), fuera del eje óptico BA, la visual sería *ao* para la posición *o* del objetivo, y *ao'* para la *o'*, yendo á parar á distintos puntos A', A'' del objeto, diferentes de A, que se halla en el eje óptico, y en el que concurrirían todas las visuales, cuando el centro del retículo estuviese en *c*, cualquiera que fuese la posición del objetivo en su movimiento á lo largo del tubo del anteojo.

Para *centrar* el retículo se dirige la visual á un objeto que presente una recta bien determinada *rs* (fig. 40, lám. 2) que se hace cubrir con la cerda *mm*, moviendo convenientemente el anteojo. Si suponemos que está fuera del centro de la sección circular del tubo del anteojo, será una cuerda de igual magnitud en todas sus posiciones, y equidistará del centro. Dando una semi-revolución exacta al tubo irá á ocupar la posición simétrica *m'm'*; y para hacer que la cerda ocupe la posición *ab* de un diámetro, será preciso aflojar el tornillo *c* y mover el *d* hasta que equidiste de *mm* y *m'm'*, que pueden haberse señalado en un renglón, así como la paralela equidistante *ab*.

Haciendo después coincidir el otro hilo con la misma recta *rs*, puede llevarse á ocupar la posición del diámetro *cd*. Entonces el punto de intersección de los hilos estará en el centro de la sección del tubo, y por consiguiente en su eje de figura.

Así, durante una revolución completa ó un número cualquiera de revoluciones del anteojo, el cruzamiento de las cerdas cubrirá un mismo punto de observación.



95. **Paralelismo de una recta con un plano dado de posición.**—Para obtener una recta paralela á un plano T (fig. 41, lám. 2), de posición dada, como por ejemplo la horizontal (29), se emplea el anteojo *b*, llamado *de verificación*, cuyo tubo *s* está invariablemente situado entre dos cubos metálicos *c*, *c'* perfectamente iguales. Dirigiendo la visual por este anteojo á un objeto *a'* lejano y bien determinado, é invirtiéndole después de modo que las caras superiores de los cubos vayan á ocupar la posición inferior, se observará el punto *a''* en que generalmente va á parar la visual; y moviendo los tornillos del retículo hasta que termine en *a*, equidistante de *a'* y *a''* (94), la posición *ba* del eje óptico del anteojo será la paralela al plano que tratábamos de determinar. Cuando en ambas posiciones la visual va á parar al mismo punto, como sucedería si desde luego el eje óptico ocupase la posición *ba*, no hay que mover el retículo.

96. **Horizontalidad perfecta de una de las cerdas del retículo.**—Centrado el anteojo *b* (fig. 41, lám. 2) como acabamos de indicar (95), si le hacemos girar apoyándose constantemente en el plano sobre que insiste, el cruzamiento de las cerdas irá cubriendo sucesivamente los puntos *c*, *c'*, *c''* (fig. 42, lám. 2) de una horizontal cubierta constantemente por una de las cerdas del retículo si es también perfectamente horizontal; pero si no, sólo cubrirá al punto *c* en la posición oblicua *df* en que ahora suponemos á la cerda, y en las sucesivas *d'f'*, *d''f''* dejará descubierto á dicho punto. En este último caso se hace mover el tubo del retículo alrededor de su eje ó todo el tubo *s* si es posible alrededor de su eje de figura, hasta una posición en que el punto *c* quede cubierto sucesivamente por los de la indicada cerda, mientras se halle en el campo del anteojo moviendo á éste como hemos dicho.

97. **Alidada de anteojo.**—La alidada de anteojo está dispuesta de modo que sobre la regla AB (fig. 43, lám. 2) se eleva un soporte perpendicular á ella, al extremo del cual gira alrededor de su eje de figura y dentro de una anilla un eje paralelo á AB, á cuya extremidad puede el eje óptico del anteojo *m* describir un plano perpendicular á la regla. El plano descrito es el que hemos llamado (87) de colimación.

Antes de proceder á las verificaciones y correcciones de la alidada de anteojo, expondremos los principios siguientes en que se fundan.

98. **Perpendicularidad de una recta con respecto á**

**su eje de rotación.**—Cuando una recta *ab* (fig. 44, lám. 2) es oblicua con respecto á su eje de rotación *cd*, describe en su movimiento alrededor de él una superficie cónica, y al cabo de una semi-revolución exacta ocupa una posición simétrica *a'b'*, resultando iguales los ángulos *m* y *m'*, y siendo, por lo tanto, el *a'tb* doble del complemento de uno de ellos, y su bisectriz *zx* la dirección perpendicular que ha de darse á la recta dada *ab*. Esto podrá conseguirse marcando los puntos *r'* y *r''* en las direcciones de las posiciones simétricas *ab* y *a'b'* y á igual distancia de *t*, y señalando el punto *r*, medio de *r'* y *r''*, que determinará con el *t* la dirección de la bisectriz.

99. Si *cd* es la recta que gira alrededor de *zx*, se puede hacer que *ab* coincida con el eje de rotación, empleando el mismo procedimiento.

100. La disposición de *ab* en ambos casos puede adoptarse, cualquiera que sea la posición del eje *cd*, ya vertical, horizontal ó inclinada.

101. Tratándose de la alidada correspondiente á un limbo cualquiera, se pone en coincidencia con su cero el del nonius y se dirige la visual á un objeto *r'* (fig. 44, lám. 2); dando después una semi-revolución exacta al nonius, la alidada ocupará la posición simétrica *a'b'*, y el arco correspondiente al ángulo *a'tb*, y que la alidada recorre para pasar de nuevo á la posición *ab*, es el duplo del que tendría que recorrer para tomar la dirección *zx* perpendicular á *cd*.

102. Cuando la alidada es excéntrica, después de establecer la coincidencia de los ceros, se dirige por ella la visual á un punto muy lejano A (fig. 45, lám. 2) en dos posiciones diametralmente opuestas B y D, observando en el nonius si ha dado una semi-revolución exacta, en cuyo caso la alidada será perpendicular á su eje de rotación, porque hallándose entonces sensiblemente DC en prolongación de CB, y siendo el ángulo *m* muy pequeño por serlo también la base DB del triángulo isósceles ABD, los ángulos iguales ACB y ACD son sensiblemente rectos, y la alidada por lo tanto perpendicular á su eje de rotación. De no verificarse la condición expresada, se corrige la posición de la alidada haciéndola girar hasta que el nonius señale la mitad de la diferencia á 180° observada (101) por exceso ó por defecto, variando la posición de la visual en la alidada hasta que vaya á parar de nuevo al punto A de observación.



Si, por ejemplo, la lectura del arco recorrido es  $181^{\circ} 26'$ , se hará que el nonius marque para la corrección  $180^{\circ} 43'$ . Si es  $179^{\circ} 14'$  se hará que señale  $179^{\circ} 37'$ .

103. El procedimiento que acabamos de dar á conocer puede aplicarse como una modificación del anterior (101).

104. **Verticalidad del plano descrito por una recta que gira alrededor de otra á la cual es perpendicular.**

—Dispuesta la alidada  $ab$  (fig. 46, lám. 2), perpendicularmente á su eje de rotación  $cd$  (98) es preciso que describa en su movimiento un plano vertical; lo que tendrá lugar cuando dirigida una visual por ella á la vertical  $v$ , y haciéndola girar alrededor de su eje, vaya la visual á terminar á los distintos puntos del cordón de la plomada; variando en caso contrario la posición de  $cd$  hasta que se verifique la circunstancia de que nos ocupamos. El plano descrito por la visual será vertical (13), y horizontal el eje de rotación.

105. **Verificaciones y correcciones de la alidada de anteojo.**—1.<sup>a</sup> Es la misma que en la alidada de pínulas (88).

2.<sup>a</sup> *Que el eje óptico del anteojo V* (fig. 41, lám. 2), *sea perpendicular á su eje de rotación.*—Se verifica como hemos dicho (99) viendo si antes y después de una semi-revolución del anteojo entre sus collares, la visual va á terminar á un mismo punto  $r$  (figura 44, lám. 2). En caso contrario será preciso mover el retículo por los tornillos que mueven la cerda vertical (91), hasta que termine la visual en  $r$  á igual distancia de los puntos  $r'$  y  $r''$  observados en las dos posiciones indicadas del tubo del anteojo.

Si el anteojo no puede girar dentro del collar ó abrazadera en que se encuentra y sí dar una semi-revolución completa alrededor de  $cd$ , se invierte después de dársela el aparato, de modo que cambien de posición los extremos  $c$  y  $d$  de este eje, y se ejecuta la misma verificación y corrección.

3.<sup>a</sup> *Que el plano descrito por el eje óptico del anteojo sea vertical.*—Se verifica como hemos dicho (104), y se dispone verticalmente una de las cerdas moviendo el anteojo dentro del collar, hasta que cubra exactamente la cerda al cordón de la plomada.

4.<sup>a</sup> *Que el plano vertical que describe la alidada tenga por traza sobre el plano de la regla la línea de fe.*—Se ejecuta como hemos dicho (88—3.<sup>a</sup>), teniendo en cuenta que al dirigir la segunda visual es preciso volver el ocular al lado del observador. El error de colimación á que puede dar lugar la posición del retículo, no in-

fluye tampoco en la apreciación gráfica de los valores angulares.

5.<sup>a</sup> *Que el eje óptico del anteojo sea horizontal cuando coincide el cero del nonius con el del arco vertical sz* (fig. 43, lám. 2).—La visual  $Va$  (fig. 41, lám. 2) será paralela al tablero  $T$  ó al eje  $ba$  del anteojo  $s$  de verificación, dentro del límite de apreciación del nonius, cuando concorra con ellos en un punto  $a$  situado á una distancia suficientemente grande. En efecto, llamando  $x$  á esta distancia,  $d$  á la altura  $dr$ , y  $m$  al ángulo  $rad$ , se tendrá  $d = x \text{ tang. } m$ ; de donde se deduce la ecuación

$$x = \frac{d}{\text{tang. } m} \quad [8].$$

Si suponemos, por ejemplo,  $d = 0^m,3$  y  $m = 1'$ , resultará  $x = 1031^m$ .

Por consiguiente, tomando el punto  $a$  á una distancia mayor, el ángulo  $m$  no llegará á valer  $1'$ , y el error será inapreciable en el instrumento. Todos los ángulos de elevación y de depresión que se observen en lo sucesivo, estarán afectados de este error inapreciable.

106. **Tornillos empleados en los instrumentos.**—Además de los tornillos que sólo se emplean para unir las diferentes piezas entre sí y facilitar el desarmarlas, hay otros que sirven para variar convenientemente sus posiciones relativas, y se llaman *tornillos de corrección*; así como otros que tienen por objeto modificar los movimientos de las partes giratorias del instrumento, con relación á las que están destinadas á permanecer fijas en posiciones determinadas.

107. **Tornillos de presión, y de ajuste ó coincidencia.**—El movimiento de una pieza  $N$  (fig. 47, lám. 2), que puede girar alrededor de un eje, apoyándose siempre sobre otra  $L$  destinada á permanecer en una posición invariable, puede impedirse apretando un tornillo  $a$ , que oprime entre sí y contra la pieza  $L$  á dos placas proyectadas en  $p$ : una de las cuales, invariablemente unida á  $N$ , imposibilita su movimiento. El tornillo  $a$  se llama *de presión* por lo que acabamos de indicar; ó *de movimiento rápido*, porque aflojándole puede girar la pieza  $N$  libremente.

El tornillo  $a$  entra generalmente á formar parte de un sistema adecuado de movimientos, con otro tornillo  $c$ , llamado *de ajuste ó coincidencia*, y también de *movimiento lento*, en razón á la disposición del sistema. Por ella, una vez oprimido el tornillo  $a$ , se hace