136. **Medida del error de excentricidad.**—El error de excentricidad para una posición dada A′B′ (fig. 63, lám. 3) de la alidada, se obtiene por la igualdad

$$CA' = CB' + B'b' + 180^\circ + A'a'$$

de la cual se deduce

$$B'b' = \frac{CA' - 180^\circ - CB'}{2} \qquad [12].$$

que da el error $Bb' = A'a'$, en función de los arcos CA′ y CB′.

137. **Medida de los ángulos múltiplos ó repetición de los ángulos.**—Con los limbos de círculo entero se puede ejecutar la operación llamada *repetición de los ángulos*, y debida al matemático francés Bordá.

Para la repetición del ángulo AOM (fig. 34, lám. 2), medido como hemos indicado (112), se fija la alidada al limbo y se repite la operación que hemos dado á conocer, llevando al limbo y la alidada unidos, hasta que esta última se halle dirigida al punto A; fijando entonces el limbo y dirigiendo la alidada á M, se hallará un ángulo doble del primero, pudiendo obtenerse del mismo modo el triplo y los demás múltiplos sucesivos.

138. La repetición de los ángulos corrige en general los errores que provienen de la excentricidad de la alidada (134) y de los defectos que siempre tienen las graduaciones de los limbos, por esmerada que sea su construcción. Sirve además para llevar la apreciación de los ángulos más allá de lo que permite el nonius del instrumento. En efecto, el valor de un ángulo de 16° 5′ 30″, que no puede dar un nonius que aprecia minutos, se obtendría hallando la mitad del arco de 32° 11′, que puede obtenerse por la repetición.

139. **Medida y repetición de los ángulos situados en planos verticales.**—Los ángulos de elevación y depresión (81) se cuentan á partir del cero del limbo, con el que debe coincidir el del nonius cuando la dirección de la visual en la alidada es perfectamente horizontal, cualquiera que sea el error de colimación (133).

140. Los ángulos zenitales se obtienen del mismo modo y referidos á la vertical del centro del limbo, por hallarse el cero de su graduación dispuesto de manera que coincide con el de la alidada, cuando la visual es vertical.

141. La repetición de los ángulos zenitales se obtiene disponiendo el limbo vertical á la izquierda del observador con respecto al instrumento, y dirigiendo la visual por la alidada vm' (fig. 64, lámina 3) al objeto a, con los ceros en coincidencia; dando después una semi-revolución al aparato así constituído alrededor de la vertical zc del centro c del limbo, la alidada tomará la posición mc; y llevándola de nuevo al objeto a, el arco mm' recorrido en sentido de la graduación, igual al recorrido por el cero del nonius, será el duplo del ángulo zenital zca. Repitiendo la operación á partir del valor angular hallado, se tendrán los múltiplos pares del ángulo zenital. Si la graduación del limbo estuviese dirigida en sentido contrario, se empezarían las operaciones disponiendo el limbo á la derecha.

142. Con los instrumentos cuyo limbo vertical está dispuesto (139) para la medida de los ángulos de elevación y depresión, puede hallarse por la repetición indicada (141) cuando el limbo gira libremente y con ambas clases de movimiento; el complemento del ángulo zenital obtenido será (81) el de elevación ó depresión que se trataba de conocer.

143. **Verificaciones y correcciones de los limbos y de los nonius.**—Antes de emplear un instrumento debe observarse: 1.° Si las divisiones del limbo son exactamente iguales entre sí, así como las del nonius; lo que puede tantearse con el auxilio de un compás.

2.° Si en varias posiciones del nonius coinciden sus divisiones extremas con otras del limbo, siendo una más las del primero (114).

3.° Si las cerdas todas de las alidadas fija y móvil (112) se hallan en un mismo plano vertical, ó se cubren exactamente colocando el observador su vista en el plano de dos de ellas. Cuando no es así, se origina un *error de colimación*, que según hemos dicho (133) no influye en la determinación de los ángulos.

4.° Si el limbo está bien centrado, así como la alidada giratoria (112). Se verifica esta circunstancia midiendo todos los ángulos de un triángulo ó los de dirección (80) que forman entre sí los lados de un polígono, y viendo si su suma es igual respectivamente á 2R ó á 2R (n—2) para un polígono de n lados (Geom., Teor. 26); ó bien resulta un error menor que n veces el límite de apreciación angular.

144. **Reducción de los ángulos al horizonte.** — Tres puntos A, B, C (fig. 65, lám. 3) del terreno, determinan un plano,

en general inclinado al horizonte. Supongamos conocida la longitud de los tres lados de este triángulo, y medido el ángulo BAC ó S, formado en el plano de los objetos A, B y C por las rectas AB y AC. Concibiendo un plano horizontal que pase por A, y hallando las proyecciones respectivas B′ y C′ de los puntos B y C sobre este plano, las rectas AB′ y AC′ que unen estas proyecciones con el punto A formarán un ángulo s, el cual será la proyección del ángulo S medido.

La determinación del ángulo s, deducida del ángulo observado, es lo que se llama la *reducción de un ángulo* S *al horizonte*. Para llevarla á cabo es preciso conocer de antemano los ángulos m y n que los lados del ángulo dado forman con el horizonte (31).

La resolución de los triángulos rectángulos ABB′, ACC′, nos dará á conocer los lados AB′, BB′ y AC′, CC′. Considerando la paralela CD á C′B′, se obtendrá el valor de BD, diferencia entre BB′ y CC′; con lo cual podrá resolverse el triángulo CBD y obtener el valor de CD = C′B′. Conociendo entonces los tres lados del triángulo AC′B′, podrá obtenerse el valor de s.

Las resoluciones indicadas pueden ejecutarse gráficamente ó por el cálculo.

Para hacer aplicación de este último á un ejemplo particular, supongamos que se tiene:

$$AB = 140^m{,}2; \quad S = 62^\circ\, 25';$$
$$AC = 119{,}4; \quad m = 20^\circ\, 16';$$
$$BC = 135{,}7; \quad n = 14^\circ\, 40';$$

Se tendrá desde luego:

$$AB' = 140{,}2 \times \cos.\ 20^\circ\, 16' = 131{,}5;$$
$$BB' = 140{,}2 \times \text{sen.}\ 20^\circ\, 16' = 48{,}56;$$
$$AC' = 119{,}4 \times \cos.\ 14^\circ\, 40' = 115{,}5;$$
$$CC' = 119{,}4 \times \text{sen.}\ 14^\circ\, 40' = 30{,}23;$$

de cuyos valores se deducirá

$$BD = 48{,}6 - 30{,}2 = 18{,}4;$$

Calcularemos el lado DC haciendo

$$DC = \sqrt{135{,}7^2 - 18{,}4^2} = \sqrt{18075{,}93} = 134{,}4;$$

Por último tendremos el valor de

$$\cos.\ s = \frac{131{,}5^2 + 115{,}5^2 - 134{,}4^2}{2 \times 131{,}5 \times 115{,}5} = \frac{12569{,}2}{30376{,}5} = 0{,}4137803;$$

que corresponde á un ángulo $s = 65^\circ\, 33'$.

145. Cuando uno de los lados del ángulo S es superior y otro inferior al plano horizontal de su vértice, el lado BD del triángulo que da el valor de CD es la suma de los catetos verticales CC′ y BB′ calculados como en el caso anterior.

146. **Reducción de los ángulos al centro de la estación.**—En el curso de las operaciones ocurre á veces tener que hallar el valor de un ángulo cuyo vértice es inaccesible, en el cual no pueden establecerse por lo tanto los instrumentos para ejecutar las operaciones necesarias; pero que estando perfectamente determinado este vértice, y prestándose por su disposición á ser observado con facilidad desde otros puntos, es de la mayor importancia su elección para figurar entre los principales del plano. Tales son las veletas de las torres y los picos elevados que presentan las cordilleras.

Sea, por ejemplo, C (fig. 66, lám. 3) uno de estos puntos, y supongamos que tratamos de hallar el valor del ángulo que forman en él las rectas CA, CB, tiradas á otros dos puntos A, B del terreno, los cuales ocupan posiciones ya determinadas. Trazaríamos una recta DP que marcase la dirección del punto elegido á otro punto fijo distante P, midiendo además el ángulo m que forma con el lado CB en que se encuentra el punto D. Determinando el D′ en que la recta DP corta al otro lado del ángulo C, se pasa á medir el ángulo m' que con este lado forma la misma recta DP. La diferencia $m - m'$ de los ángulos observados da el valor del ángulo en el centro. En efecto, considerando tirada por D′ la D′E paralela á CB, se tiene

$$c = c' = s - m' = m - m'.$$

147. Este medio de resolver el problema dista mucho de la exactitud que proporciona el cálculo en el empleo del procedimiento siguiente. Sea c (fig. 67, lám. 3) el ángulo que se trata de conocer por medio del ADB $= m$, obtenido desde el punto D, que se ha elegido para la observación y es diferente del vértice C, en el que no puede hacerse. La posición de los ángulos que en la figura aparecen da á conocer (Geom., Teor. 14, Cor. 1.º) las igualdades

$$M = c + n' = m + n;$$

de las que se deduce

$$c = m + n - n'; \qquad [13].$$

Los valores de n y de n' se deducen de la relación conocida entre los lados de un triángulo y los senos de los ángulos opuestos, que da

$$\text{sen. } n = \frac{d \text{ sen. } s}{a}; \qquad \text{sen. } n' = \frac{d \text{ sen. } t}{b};$$

148. La ecuación [13] (147) resuelve el problema y nosdice: que *para hallar el valor del ángulo en el centro, habrá que añadir al ángulo observado* m, *el ángulo* n *bajo el cual se vería desde el extremo* B *del lado* CB *del ángulo en el centro más próximo al punto de estación la distancia entre este y el centro del ángulo, y restando de esta suma el ángulo* n′ *bajo el cual se vería la misma distancia desde el extremo* A *del otro lado del ángulo en el centro.*

149. En el caso particular de ser $n = n'$, el punto D está en la circunferencia que determinan los A, B, C (fig. 68, lám. 3). En efecto, los ángulos iguales n y n', teniendo sus vértices respectivos B y A en la circunferencia, serán ángulos inscritos; y como además sus lados se cortan dos á dos, en virtud de la construcción que se hace para reducir el ángulo al centro de la estación, y es evidente que dos de ellos lo verifican en el punto C, el D en que los otros dos se cortan pertenecerá también á la misma circunferencia.

Entonces la corrección es nula: pues el ángulo m observado es igual al c del centro de la estación, toda vez que ambos tienen la misma medida. (Geom., Teor. 50). Esto resulta también en la fórmula [13] (147); pues siendo $n = n'$, se reduce á $c = m$.

La condición de ser D un punto de la circunferencia puede siempre conseguirse midiendo el ángulo t, si no se conoce por observaciones ó cálculos anteriores, y buscando por tanteos un punto D tal, que las rectas tiradas desde él á los puntos A y C formen un ángulo $t' = t$.

150. **Aplicaciones de la fórmula general.**—Supongamos que conocidos los valores de $CB = a$; $CA = b$ (fig. 67, lám. 3), medidos directamente el lado $CD = d$, así como los ángulos t y m, y deducido $s = m + t$, se trate de hallar el valor de c. Sean:

$$CB = 300^m{,}2; \quad CA = 284^m{,}8; \quad CD = 15^m{,}3;$$
$$t = 66^\circ\ 44'; \quad m = 61^\circ\ 11'; \quad s = 127^\circ\ 55';$$

Empezaremos por calcular los valores de n y n' (147), para lo que tendremos:

$$\log.\text{ sen. } n = \log.\ 15{,}3 + \log.\text{ sen. } 52^\circ\ 5' + \text{C.}^{\text{to}} \log.\ 300{,}2 - 10;$$
$$\log.\text{ sen. } n' = \log.\ 15{,}3 + \log.\text{ sen. } 66^\circ\ 44' + \text{C.}^{\text{to}} \log.\ 284{,}8 - 10;$$

de estas expresiones se deduce

$$\log.\text{ sen. } n = 8{,}6043056; \quad \log.\text{ sen. } n' = 8{,}6933139;$$

que corresponden á los ángulos

$$n = 2^\circ\ 18'; \quad n' = 2^\circ\ 50';$$

Aplicando entonces la fórmula [13] (147) resultará

$$c = 61^\circ\ 11' + 2^\circ\ 18' - 2^\circ\ 50' = 60^\circ\ 39';$$

151. En la resolución del problema que nos ocupa suele ser difícil la determinación del ángulo t y de la distancia d, cuando no se divisa desde D (fig. 67, lám. 3) el punto C, y no se puede llegar al pie de la vertical de este punto. Sea, por ejemplo, C (fig. 69, lámina 3) el centro de una torre redonda invisible desde D. Midiendo los ángulos z y z' de las tangentes á la torre con la visual DA, se tendrán desde luego las expresiones

$$t = z - x; \qquad t = x + z' \qquad [14],$$

de las que resulta

$$t = \frac{z + z'}{2} \qquad [15].$$

152. La distancia d se obtiene añadiendo á DH el radio r de la torre, que se deduce de la ecuación

$$r = \text{ED tang. } x = \text{ED tang. } \frac{z - z'}{2} \qquad [16],$$

en la que el valor de x se deduce (151) de la ecuación $z - x = x + z'$.

El radio puede obtenerse también midiendo la circunferencia, ó tomando la mitad de la distancia que media entre los pies de dos tangentes á la torre, perpendiculares á una recta cualquiera trazada en el terreno.

153. La distancia total $CD = d$ se deduce de la relación conocida (Geom., Teor. 76) DH : ED : : ED : DG, de la que resulta

$$DG = \frac{\overline{ED}^2}{DH} = 2r + DH;$$

y despejando r:

$$r = \frac{\overline{ED}^2 - \overline{DH}^2}{2DH};$$

Conocido el valor del radio, se tendrá:

$$d = DH + \frac{\overline{ED}^2 - \overline{DH}^2}{2DH} = \frac{\overline{DH}^2 + \overline{ED}^2}{2DH};$$

154. Si el centro C (fig. 70, lám. 3) estuviese en la intersección de las diagonales de un rectángulo ó de un cuadrado, elegiríamos un punto D, desde el cual se pudiesen ver los extremos de una misma diagonal, y mediríamos el ángulo EDF y los lados DE y DF.

Estos datos determinarían el triángulo DFE; resolviéndole, hallaríamos el valor del ángulo DFC y el del lado FE.

El triángulo DCF sería también conocido, pues sabemos el valor de DF obtenido directamente, el del ángulo DFC por la resolución del triángulo DFE, y el de CF igual á la mitad de FE. Resolviendo este triángulo, hallaríamos CD = d, y el ángulo CDF; añadiendo á este ángulo el FDA medido directamente, se tendrá el valor de t.

CAPITULO IV.

INSTRUMENTOS PARA LA MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

155. **Generalidades.**—Entre los instrumentos que sirven para la medida de los ángulos, hay unos que dan sus valores reducidos á su proyección horizontal, y otros los dan en el plano de los objetos, siendo preciso en este último caso reducirlos al horizonte (144).

156. Entre los muchos instrumentos de que hoy se hace uso, sólo describiremos los más principales, dando principio por la *Brújula*, que además de servir por sí sola para determinar losángulos de dirección, forma parte también de casi todos los instrumentos topográficos.

157. **Brújula.**—Antes de dar la descripción de este instrumento, observaremos que en el globo terrestre existe un fluido llamado magnético, que tiene su máximo de intensidad en dos puntos variables de posición, próximos á los polos, á los cuales se les da el nombre de *polos magnéticos*, así como el de *eje magnético* á la recta que los une. El plano que este eje determina con un punto cualquiera de la superficie terrestre, recibe también el nombre de *meridiano magnético* del mismo punto.

158. **Meridiana magnética.—Aguja imantada.**—La intersección del plano meridiano magnético con el plano horizontal de un punto cualquiera es la *meridiana magnética* de este punto. Se la determina por medio de la *aguja imantada*, que es una lámina *ab* (fig. 71, lám. 3) de acero templado, en forma de un rombo