

$$DG = \frac{ED^2}{DH} = 2r + DH;$$

y despejando  $r$ :

$$r = \frac{ED^2 - DH^2}{2DH};$$

Conocido el valor del radio, se tendrá:

$$d = DH + \frac{ED^2 - DH^2}{2DH} = \frac{DH^2 + ED^2}{2DH};$$

154. Si el centro C (fig. 70, lám. 3) estuviese en la intersección de las diagonales de un rectángulo ó de un cuadrado, elegiríamos un punto D, desde el cual se pudiesen ver los extremos de una misma diagonal, y mediríamos el ángulo EDF y los lados DE y DF.

Estos datos determinarían el triángulo DFE; resolviéndole, hallaríamos el valor del ángulo DFC y el del lado FE.

El triángulo DCF sería también conocido, pues sabemos el valor de DF obtenido directamente, el del ángulo DFC por la resolución del triángulo DFE, y el de CF igual á la mitad de FE. Resolviendo este triángulo, hallaríamos  $CD = d$ , y el ángulo CDF; añadiendo á este ángulo el FDA medido directamente, se tendrá el valor de  $f$ .

### CAPITULO IV.

#### INSTRUMENTOS PARA LA MEDIDA DE LOS ÁNGULOS.

155. **Generalidades.**—Entre los instrumentos que sirven para la medida de los ángulos, hay unos que dan sus valores reducidos á su proyección horizontal, y otros los dan en el plano de los objetos, siendo preciso en este último caso reducirlos al horizonte (144).

156. Entre los muchos instrumentos de que hoy se hace uso, sólo describiremos los más principales, dando principio por la *Brújula*, que además de servir por sí sola para determinar los ángulos de dirección, forma parte también de casi todos los instrumentos topográficos.

157. **Brújula.**—Antes de dar la descripción de este instrumento, observaremos que en el globo terrestre existe un fluido llamado magnético, que tiene su máximo de intensidad en dos puntos variables de posición, próximos á los polos, á los cuales se les da el nombre de *polos magnéticos*, así como el de *eje magnético* á la recta que los une. El plano que este eje determina con un punto cualquiera de la superficie terrestre, recibe también el nombre de *meridiano magnético* del mismo punto.

158. **Meridiana magnética.—Aguja imantada.**—La intersección del plano meridiano magnético con el plano horizontal de un punto cualquiera es la *meridiana magnética* de este punto. Se la determina por medio de la *aguja imantada*, que es una lámina  $ab$  (fig. 71, lám. 3) de acero templado, en forma de un rombo



muy prolongado, á la que artificialmente se ha hecho adquirir las propiedades de un imán natural. Está provista de una armadura *c* con una piedra ágata en su interior, en la que está practicada una cavidad cónica, cuyo vértice, que corresponde al centro de gravedad de la aguja, se apoya sobre el extremo aguzado de un estilo vertical *cd*. La acción que la tierra ejerce sobre los imanes que pueden moverse libremente, hace que los extremos *a* y *b* de la aguja se dirijan á los polos magnéticos N y S, determinando así la meridiana magnética. El extremo *a* que se dirige al Norte, y conserva el color azul del temple del acero, se llama *polo norte ó boreal* de la aguja, y el *b*, *polo sur ó austral*.

159. **Declinación de la aguja magnética.**— El ángulo *d* (fig. 72, lám. 3) que la aguja magnética *ns* situada en un punto A forma con la meridiana astronómica NS del mismo, ha recibido el nombre de *declinación de la aguja magnética*. Como las rectas NS y N'S' son perpendiculares (18) á la vertical del punto A, intersección de los planos meridianos, el ángulo *d* que forman es la medida del diestro de los planos.

160. La declinación, variable de un tiempo á otro es oriental ú occidental, según que el extremo *n* de la aguja se dirige al Este ó al Oeste de la meridiana astronómica. En 1580 era oriental y de 11° 30'; en 1663 era nula, y después se hizo occidental creciendo hasta 1814, en que era de 22° 34'. A partir de esta máxima desviación, la declinación, occidental siempre ha disminuído, siendo actualmente en Madrid de 19° 20' al Oeste.

161. Trazada la meridiana astronómica de un punto A, puede conocerse la declinación disponiendo en él la aguja magnética y observando el ángulo *d* que forma con ella. Recíprocamente, conocida la declinación, se obtendrá la meridiana astronómica trazando una recta que forme con la dirección de la aguja y al Este de la misma el ángulo *d*.

Dados estos preliminares, pasemos á la descripción de la brújula.

162. La *brújula* es un goniómetro que se compone de una aguja magnética *ns* (fig. 73, lám. 3), la cual se apoya en un estilo situado en el centro de un limbo graduado y contenido en una caja cuadrada de madera A, A'. En el fondo de esta caja se hallan trazadas dos rectas NS, EO, perpendiculares entre sí y paralelas á sus costados, representando la NS la meridiana astronómica, y N. E. S. O. los puntos cardinales. La meridiana magnética lo está tam-

bién por la recta *Ca*, que forma con NS un ángulo igual á la *declinación* de la aguja (159).

Lleva el limbo una sola graduación completa de izquierda á derecha en grados y medios grados, y está un poco elevado sobre el fondo de la caja, á fin de que la aguja enrasede perfectamente con él y sea más fácil la apreciación de las divisiones. El cero de la graduación corresponde al Norte N, y las divisiones 90°, 180°, 270° respectivamente al Este, Sur y Oeste de la caja. El cero se marca ordinariamente con el número 360.

El limbo se cubre con un cristal para evitar los movimientos que el viento imprime á la aguja; y el cristal se sujeta con un aro circular de cobre, que en virtud de su fuerza elástica oprime las paredes de un pequeño resalto de la misma forma que presenta la caja, é impide que el cristal se levante.

Una palanca acodada *m* sirve para separar la aguja del estilo sobre que se apoya y sujetarla contra el cristal; con lo cual se evita el desgaste del extremo del estilo cuando no se opera con la brújula.

La palanca tiene su punto de apoyo cerca del extremo *b* de la caja, y descansa por su propio peso sobre el fondo de la misma cuando una pequeña pieza metálica *c*, que se mueve dentro de una cavidad practicada en la caja, deja descubierto dicho extremo; pero cuando se la mueve hacia este extremo hasta oprimirle, la palanca gira alrededor de su punto de apoyo, y el otro extremo que abraza el estilo se eleva sujetando la aguja contra el cristal. A fin de que entonces no pueda caer la aguja, el cristal se halla elevado sobre el extremo del estilo que la sostiene, en una cantidad menor que la altura que tiene la armadura de la misma aguja. Una tapa de madera cubre la caja A, entrando en unas ranuras que ésta presenta al efecto.

En uno de los costados paralelos á la línea NS hay una alidada de madera de pínulas como la de la figura, ó de anteojo sujetas á girar alrededor de un eje *d*.

El instrumento puede moverse alrededor de otro eje *e*, que forma cuerpo con la placa *r*, y fijarse al pie del instrumento por el tornillo de presión *t* (107).

El pie es una rodilla de juego de nuez (123), provista de un tornillo *t'*, que sirve para sujetarle á la espiga de un trípode ordinario (131).

163. En algunas brújulas el limbo es susceptible de un peque-



ño movimiento alrededor de su eje de figura, por medio de un tornillo que se halla á la parte inferior de la caja, y está provisto de un piñón cuyos dientes engranan con los que lleva una parte del limbo. La amplitud del giro se mide por el arco recorrido ante un estilo que corresponde exactamente al punto N.

164. **Uso de la brújula.**—Los ángulos de dirección de las rectas, tomados con este instrumento y referidos á la *meridiana magnética*, que es en este caso la recta dada de posición (80) y que es una recta fija, reciben el nombre de *rumbos* ó *azimuts*, pudiendo también referirse á la *meridiana astronómica*. Sirve, por lo tanto, la brújula para determinar el *rumbo* de la recta que une dos puntos dados A y B (fig. 74, lám. 3); para lo cual se la coloca de modo que el centro del limbo se halle en la vertical de uno de ellos A, y se horizontala la caja haciendo que engrase la aguja con el limbo por ambos extremos en dos posiciones distintas de la caja, con lo que se hallará la brújula *en estación*. Dirigiendo entonces la visual por la alidada al punto B, la graduación  $z$  que marque el extremo azul será el rumbo de la recta AB.

Los rumbos pueden apreciarse en el limbo á simple vista hasta tercios ó cuartos de grado: el mayor error que puede cometerse por lo tanto en la observación provendrá de tomar un tercio de grado por un cuarto, ó al contrario, fracciones que se diferencian en  $20' - 15' = 5'$ , que es el *límite de apreciación*.

165. **Error de excentricidad.**—El rumbo hallado para AB (fig. 74, lám. 3) como acabamos de indicar, está determinado por el arco Nz, correspondiente al ángulo NAz, igual al BMN', que es el rumbo de la visual CB, y diferente del BAN', que es el que se trata de determinar. La diferencia  $NAz = B$  es el *error de excentricidad*, cuyo valor puede determinarse en cada caso resolviendo el triángulo ABC, cuando se conoce el valor de la recta AB y el de la excentricidad constante AC de la alidada; pues se tiene la relación

$$\text{sen. } B = \frac{AC}{AB}; \quad [17].$$

166. El error de excentricidad puede eliminarse separando la visual á la derecha del punto observado en una cantidad igual á la excentricidad AC; lo cual puede conseguirse marcando con un color vivo en el pie del jalón que ha de colocarse en B, la excentricidad indicada, con objeto de juzgar por comparación á las

diferentes distancias la cantidad en que debe separarse la visual.

167. **Comprobación de los rumbos.—Observaciones directas y observaciones inversas.**—Trasladando la brújula al punto B (fig. 74, lám. 3), y observando desde él el rumbo de la recta AB, se ve si el que entonces señala el extremo Sur de la aguja es el mismo que se obtuvo por la observación directa.

168. **Verificaciones y correcciones.**—1.<sup>a</sup> *Que la aguja en todas sus posiciones sea un diámetro del limbo:* lo que exige que el estilo sea perfectamente perpendicular al plano del limbo, y que el punto de suspensión y los extremos de la aguja estén en una misma línea recta.

Cuando el estilo es perpendicular al plano del limbo, la proyección de su extremo sobre este plano es precisamente el centro del limbo; entonces todas las posiciones de la aguja serán diámetros del mismo, y la diferencia de las lecturas hechas con los extremos de la aguja será constantemente de  $180^\circ$ .

Pero si el estilo no es perpendicular á dicho plano y se proyecta según Od (fig. 63, lám. 3), existe una sola posición AB, en la cual la aguja ocupa la de un diámetro, que es la de la proyección dO; y en esta sola posición la diferencia de las lecturas es exactamente  $180^\circ$ . A partir de ella, la lectura de un rumbo cualquiera A'B' esta afectada en un error B'b' tanto mayor cuanto más se separa de la posición AB, y que está en su máximo en la A''B'', perpendicular á la AB (134).

En virtud de esto, cuando en dos posiciones perpendiculares entre sí, la aguja no marque rumbos que se diferencien exactamente en  $180^\circ$ , estará descentrada, y se corregirá dando al estilo la posición perpendicular al plano del limbo por medio de unas pinzas, cuando á la vista parece que no la tiene, ó rectificando cuidadosamente la aguja con un mazo.

169. Puede también evitarse esta corrección siguiendo el método (135), tomando los rumbos marcados por ambas puntas de la aguja en cada una de las posiciones de esta. Sea AB (fig. 75, lámina 3) la recta cuyo rumbo verdadero sería el arco am que llamaremos  $r$ , si la aguja estuviese centrada, pero que en el caso de estar descentrada, como se ve en la figura, será el arco an la lectura con la punta azul que representaremos por  $a$ ; la lectura con la punta blanca será el arco ann' en la dirección que marca la flecha, que señalaremos por  $b$  y que es mayor que  $180^\circ$ . Tendremos las siguientes igualdades:



$$am = an - mn;$$

$$am = ann' + m'n' - 180^\circ;$$

y sumando ordenadamente resulta

$$2am = an + ann' - 180^\circ;$$

de donde

$$am = \frac{an + ann' - 180^\circ}{2}, \text{ ó } r = \frac{a + b - 180^\circ}{2}; \quad [18].$$

En la fig. 76, ( lám. 3), la lectura con la punta azul es el arco  $am'n$  siguiendo la dirección de la flecha, y la lectura con la punta blanca es el arco  $an'$  menor que  $180^\circ$ , á cuyas lecturas llamaremos como antes  $a$  y  $b$ , y  $r$  al rumbo que buscamos, y que es el arco  $am'm$ , resultando del mismo modo las igualdades

$$am'm = am'n - mn;$$

$$am'm = an' + m'n' + 180^\circ;$$

de donde sumándolas tendremos

$$2 am'm = am'n + an' + 180^\circ;$$

de donde

$$am'm = \frac{am'n + an' + 180^\circ}{2}, \text{ ó } r = \frac{a + b + 180^\circ}{2}; \quad [19].$$

Reuniendo las expresiones [18] y [19] en una sola, tendremos la siguiente fórmula:

$$r = \frac{a + b \mp 180^\circ}{2}; \quad [20];$$

que nos dice que *para obtener con una brújula, cuya aguja esté descentrada, el verdadero rumbo de una recta, se sumarán las dos lecturas obtenidas con la punta azul y con la punta blanca, restando de esta suma  $180^\circ$ , si la lectura con la punta blanca es mayor que esta cantidad, ó añadiendo dichos  $180^\circ$  cuando dicha lectura no llegue á este valor, y dividiendo en ambos casos el resultado por 2.*

*Ejemplos:* 1.º Sea  $a = 36^\circ 45'$  y  $b = 215^\circ 45'$  (fig. 75, lám. 3), tendremos

$$r = \frac{36^\circ 45' + 215^\circ 45' - 180^\circ}{2} = \frac{72^\circ 30'}{2} = 36^\circ 15';$$

2.º Sea  $a = 274^\circ 30'$  y  $b = 93^\circ 15'$  (fig. 76, lám. 3), resultará

$$r = \frac{274^\circ 30' + 93^\circ 25' + 180^\circ}{2} = 273^\circ 52' 30'';$$

170. 2.ª *Que el eje de la alidada sea perpendicular á su eje de rotación.*—Se efectúa la verificación como hemos indicado (102), observando los rumbos  $a$  y  $b'$  que marcan respectivamente en la primera posición y en la segunda de la alidada el extremo azul y el blanco de la aguja, que son exactamente iguales cuando existe la perpendicularidad que se busca. En caso contrario, se corrige hallando la semisuma de los rumbos obtenidos, moviendo la caja hasta que la aguja marque el rumbo así deducido, y llevando el cruzamiento de las cerdas á cubrir de nuevo al punto observado, por medio del movimiento de la cerda vertical del retículo.

De no ser posible alterar la dirección de la visual, como sucede cuando la alidada es de pínulas, habrá necesidad de obtener en lo sucesivo los rumbos por la doble observación y la semisuma que acabamos de dar á conocer.

171. 3.ª *Que la línea norte-sur de la caja sea paralela al plano de la visual.*—Cuando esta circunstancia tiene lugar, los rumbos están referidos exactamente al meridiano magnético (158) y se dice entonces que la brújula está *orientada*.

Cuando la línea norte-sur del limbo no es paralela á la dirección de la visual, el ángulo de estas líneas, que se mide por el que forma la norte-sur con una paralela á la otra, es el error de declinación: el cual no influye en la posición relativa de las líneas del plano, pues tiene siempre lugar en el mismo sentido, como el error de colimación (133), pero sí en la posición absoluta, y se hace desaparecer este error de declinación con la orientación definitiva del plano.

172. **Orientación de la brújula.**—Para conocer si una brújula está orientada, se traza la meridiana astronómica (35) y se observa si el rumbo de esta recta (164) es de  $340^\circ 40'$  que señala la dirección de la citada meridiana para la declinación media actual (160). Si marca otro rumbo, su diferencia al que debe señalar será el *error de declinación*, que será preciso añadir ó restar de todos los rumbos que se observen en lo sucesivo, según haya resultado por defecto ó por exceso.

173. Cuando la brújula es de limbo móvil puede orientarse con



relación al meridiano astronómico, haciendo girar al limbo (163) hasta que el estilo señale la graduación  $19^{\circ} 20'$  que marca la declinación.

174. Cuando sólo se quiere conocer la diferencia de orientación de dos ó más brújulas, basta tomar con todas ellas el rumbo de una misma recta del terreno. Toda brújula que dé un rumbo mayor que la elegida para término de comparación, la cual es conveniente que sea una brújula orientada, indicará un error al Oeste, y será preciso restar este error de orientación de todos los rumbos que con ella se observen. Si, por el contrario, el rumbo de una brújula es menor, el error será al Este, y será preciso añadirle á los rumbos observados.

175. **Aplicaciones de la brújula.**—La brújula se emplea en la orientación de los planos, como veremos más adelante, determinando (164) el rumbo de una de las rectas que en él se consideran.

Haciéndola girar de Este á Oeste á partir de la posición *cero* de la aguja, en que determina la dirección de la meridiana, las divisiones del limbo que van enrasando con su extremo azul en el sentido de la graduación, dan los rumbos de cuantas rectas quieran considerarse en una vuelta de horizonte (80).

La diferencia de los rumbos de dos rectas da el ángulo que forman entre sí, afectado de un error de excentricidad (134), que es inferior al límite de apreciación del instrumento (164).

176. **Límites del empleo de la brújula.**—*Límite mínimo.*—El conocimiento de que el error de excentricidad disminuye á medida que aumenta la longitud de la recta cuyo rumbo queremos hallar, nos permite fijar la distancia á que corresponde un error de  $5'$ , que es el mayor que resulta de la lectura de los rumbos (164). Para distancias mayores, el error de excentricidad será inapreciable; y para ellas no hay necesidad de la corrección indicada (166). Despejando AB en la fórmula [71] (165), y haciendo en ella  $B = 0^{\circ} 5'$ , y  $AC = 0^m, 11$ , que es la excentricidad de las brújulas ordinarias, resultará

$$AB = \frac{0,11}{\text{sen. } 0^{\circ} 5'} = \frac{0,11}{0,0014544} = 75,63;$$

La longitud  $75^m, 63$  es, pues, el *límite mínimo* que corresponde á la *longitud* que debe tener la recta cuyo rumbo queremos hallar.

177. *Límite máximo.*—El límite de apreciación (164) da lugar

también á un error de desviación en la construcción de los planos, que depende de la escala en que cada uno de estos se construye, y no debe exceder en la práctica de la distancia  $0^{\text{mm}}, 2$ , la cual se considera como el límite inferior de las que la vista puede apreciar. La desviación indicada es un cateto de un triángulo rectángulo que tiene por ángulo opuesto el valor  $5'$ , como límite máximo, y cuya hipotenusa  $x$ , que es la longitud máxima de las rectas en el plano, se halla por la expresión

$$x = \frac{0,0002}{\text{sen. } 0^{\circ} 5'} = \frac{0,0002}{0,0014544} = 0,1375;$$

Este valor de  $x$  representa en la escala de  $\frac{1}{1000}$  la longitud de  $137^m, 5$ , que es la mayor que debe tomarse para una recta cualquiera del plano referida á la meridiana por medio de la brújula.

En las escalas de  $\frac{1}{5000}$  y  $\frac{1}{20000}$ , los límites correspondientes son  $687^m, 5$  y  $2750^m, 0$ .

La magnitud real de  $0^m, 1375$ , límite de las rectas en el plano, es poco diferente de la que tiene la aguja magnética en las brújulas ordinarias.

178. **Brújula de limbo zenital.**—Esta brújula difiere de la explicada (162) en la pieza de unión con el trípode, que es una plataforma de tres tornillos (129): lleva además fijo á la caja un nivel  $n$  (fig. 77, lám. 3) con sus tornillos de corrección  $b$ , un limbo dividido ( $l, l'$ ) susceptible de un pequeño movimiento por el tornillo de corrección  $r$ , que está á la parte posterior del instrumento representada en L, alrededor de un eje perpendicular á él, y fijo á la caja perpendicularmente á uno de sus costados. El tornillo  $r$ , semejante á los de ajuste ó coincidencia (107), gira sin avanzar en la pieza  $k$  unida al limbo, y su rosca se introduce en una tuerca fija invariablemente á la caja. Un segundo nivel ( $m, m'$ ) unido á la parte posterior del limbo, tiene su tornillo de corrección  $s$ , igualmente dispuesto que el  $r$ , estando una de sus esferas fija al limbo y la otra al tubo del nivel. Ambos tornillos se ponen en movimiento por medio de una llave.

La alidada de esta brújula es un anteojo astronómico (90) sujeto por las abrazaderas ( $h, h'$ ) á una pieza de metal que gira alrededor del eje del limbo ( $l, l'$ ) y la cual lleva también los nonius  $v$ . El movimiento de la alidada puede ser á voluntad rápido ó lento