# CAPITULO V.

## PLANIMETRÍA.

235. **Problemas.**—La medida de los ángulos y el trazado y medición de las alineaciones suministran medios para la resolución de muchos problemas, importantes los unos como auxiliares en el levantamiento de los planos, y los otros como destinados á la determinación geométrica de los puntos del terreno. Nos ocuparemos, por lo tanto, de los más principales, indicando los procedimientos diferentes y los distintos instrumentos con cuyo auxilio pueden resolverse. Advertiremos que en todos ellos se suponen medidos horizontalmente los ángulos, así como las alineaciones, ó bien reducidos por el cálculo (69 y 144) á sus proyecciones horizontales.

236. **Por un punto de una alineación, trazar otra que forme con la primera un ángulo dado.**—Bastará medir el ángulo azimutal (207), si no es conocido su valor, y construirle desde el punto dado (208). Con la brújula se halla también su amplitud (175), y determinando desde dicho punto el rumbo de la alineación (164), se mueve la caja en el sentido conveniente, hasta que haya pasado por debajo de la aguja el número de grados que marca el valor del ángulo que se trata de obtener.

237. Con la escuadra se mide una distancia cualquiera AD (fig. 99, lám. 4), así como la perpendicular DE á esta recta en el punto D. Tomando desde el punto dado A′ y en la recta dada A′C′ la magnitud $A'D' = AD$, así como la $D'E' = DE$ en la perpendicular á la A′D′ en su extremo D′, la alineación A′E′ determinará el ángulo pedido. Si el ángulo dado es obtuso, se construirá su suplemento. Cuando se tiene en grados el ángulo $A = 27° \; 13'$ que se



trata de formar en A′, se tomará una magnitud dada $A'D' = 10^m$, por ejemplo, y se calculará la perpendicular por la ecuación

$$D'E' = A'D' \times \text{tang. } 27° \; 13' = 10 \times 0{,}5143 = 5^m{,}143,$$

cuya longitud se tomará en ella desde D′ para obtener el punto E′, que unido con A′ resuelve el problema.

La misma fórmula se empleará para hallar el valor del ángulo A, si no es conocido numéricamente, midiendo AD y DE, sustituyendo sus valores en la fórmula y despejando tang. A.

238. Se resuelve este problema con solo el auxilio de una cuerda y tres piquetes, clavando éstos en el vértice A (fig. 99, lám. 4) y en otros dos puntos D, E, tomado cada uno de ellos en cada uno de los lados del ángulo, y rodeándoles de una cuerda tirante, se determinará así el triángulo ADE, y por consiguiente el ángulo A. Señalando los puntos en que la cuerda toca á los piquetes y transportando el triángulo al punto A′ en que se quiere construir el ángulo, en el cual se clava el piquete A, se fija el D con la cuerda tirante en D′, que corresponde á la alineación dada A′C′, y atirantando las porciones A′E′ y D′E′ de la misma, se fija la posición del piquete E en E′, que determinará con el A′ la nueva alineación.

239. **Levantar una perpendicular en un punto dado de una alineación.**—Este problema es un caso particular del anterior (236), que se resuelve haciendo que la graduación del instrumento marque para las alidadas el ángulo de 90°. Con la plancheta bastará orientarla con la alineación (195) y levantar por una construcción geométrica una perpendicular á su homóloga en el tablero por el punto homólogo al del terreno; colocando después jalones en la dirección de la visual dirigida por la alidada, cuya línea de fe se hace coincidir con la perpendicular trazada en el tablero.

240. Ya hemos dicho (200. —1.°) el modo de resolver este problema con la escuadra.

241. La cuerda, ó mejor la cadena, se emplea tomando las distancias AB, AC y BC (fig. 100, lám. 4) de las longitudes respectivas 4 metros, 3 y 5, con las que se formará un triángulo rectángulo en A, á causa de ser (Geom., Teor. 71) $CB^2 = CA^2 + AB^2$ ó $5^2 = 3^2 + 4^2$. El punto A se coloca en el punto en que se ha de levantar la perpendicular, y AB en la línea dada.

También se puede rosolver tomando á ambos lados del punto dado D (fig. 101, lám. 4) las distancias iguales AD y DB, y fijando en A y B los extremos de una cuerda que se pone tirante cogiéndola por su punto medio C, en el que se clava un piquete. Este punto da, unido con el D, la perpendicular pedida, que se determina mejor marcando análogamente el punto C'.

242. **Trazar una perpendicular á una alineación dada, desde un punto exterior á ella.**—Puede resolverse hallando por tanteos, con las alidadas dispuestas como en el problema anterior (239), el pie de la perpendicular, como se dijo para la escuadra (200 — 2.º); pero es preferible medir la distancia del punto dado C (fig. 102, lám. 4) á un punto cualquiera B de la alineación, medir el ángulo CBA y determinar la distancia de B al pie de la perpendicular por la relación

$$DB = CB \times \cos. B;$$

tomando el valor hallado en la alineación AB, se tendrá el punto D, que determina con C la perpendicular pedida.

243. También se aplica este procedimiento á la plancheta, orientando con la alineación AB su homóloga trazada en el tablero (195), dirigiendo la alidada por el punto de esta recta que se halla en la vertical de A al punto dado C, y trazando una línea de lápiz por el canto de la línea de fe. Midiendo la recta AC se tomará su magnitud con arreglo á escala en la recta acabada de trazar, determinando así el punto homólogo de C: bastará bajar desde él una perpendicular á la recta del tablero orientada con AB, medir la distancia del pie de la perpendicular al punto que se corresponde verticalmente con A, y tomarla desde este punto en la alineación, con lo que se tendrá el pie D de la perpendicular.

244. Con la brújula podrá tomarse el rumbo de AB, y estacionando el instrumento en C, marcar con jalones la direccion del rumbo que forma un ángulo de 90° con el hallado para AB.

245. Tratándose de la escuadra, hemos dicho ya (200. — 2.º) el modo de resolver este problema; pero cuando el punto C no es visible desde el paraje hacia el cual debe resultar el pie de la perpendicular, se levanta en C una perpendicular CA á la recta que une este punto con una cualquiera B de los de la alineación conocida, determinando su intersección A con esta alineación y midiendo los lados AB y CB: entonces podrá determinarse la posición del pie D de la perpendicular, calculando BD por la proporción conocida (Geom., Teor. 70. — 1.º).



$$AB : BC :: BC : BD = \frac{\overline{BC}^2}{AB}.$$

Si se quiere conocer además la longitud de la perpendicular CD, se la deducirá de la proporción

$$AD : CD :: CD : BD.$$

246. Con la cuerda ó cadena se afianzará en el punto dado C (fig. 101, lám. 4) el punto medio de una porción ACB de ella; después se extenderán las dos partes AC y CB hasta que sus extremos terminen en la EF en dos puntos A y B, que se señalarán en el terreno; se dividirá después la distancia AB en las dos partes iguales AD y DB, lo que se puede siempre ejecutar marcando con un piquete D el punto medio de una cuerda igual á AB: los piquetes C y D determinarán la perpendicular.

La división de la recta AB en dos partes iguales se puede ejecutar cogiendo la cuerda ó cadena por el punto medio C, estando sujeta por sus extremos en los A y B, transportando el punto C al C', y clavando el piquete C' de modo que la cadena quede bien tirante; la recta CC' determina la perpendicular, y divide además á la AB en dos partes iguales.

Si el punto dado fuese el extremo A de la línea AB (figura 103, lámina 4), que no se puede prolongar á la izquierda de A, se elegirá un punto C, en el cual se clavará un jalón; tomando después una cuerda de la longitud CA, se llevará de C á D, y en sentido de la alineación CD se tenderá la misma cuerda de C á E; los puntos A y E determinarán la perpendicular (Geom., Teor. 50.— Corol. 2.º), por ser CD = CA = CE.

247. **Por un punto dado fuera de una alineación, trazar otra paralela á la primera.**—Se mide el ángulo BFE (figura 104, lám. 4), que forma con la alineación dada AB la que determina uno de sus puntos F con el exterior dado E, y trasladándose á este último punto, se trazará una alineación EC, que forme con la FE un ángulo FEC = BFE, la cual será la paralela pedida (Geom., Teor. 7).

248. Con la plancheta se resuelve este problema gráficamente, siguiendo el mismo procedimiento.

249. Empleando la brújula, bastará trazar desde E una alineación del mismo rumbo que el obtenido previamente para AB.

250. Con la escuadra se bajaría una perpendicular desde el pun-

to dado D (fig. 105, lám. 4) á la alineación AB, se levantaría otra á esta recta desde uno cualquiera G de sus puntos, y tomando en ella desde G una magnitud GE igual á la longitud de la primera perpendicular, se determinaría el punto E, que unido con D, daría la paralela pedida.

251. Haciendo uso de la cadena, trácese desde el punto dado E (fig. 104, lám. 4) una oblicua EF á la recta dada AB; por un punto G tomado en esta recta, y por O, medio de EF, tírese la GH, tomando con la cadena ó cuerda OH = OG, y los puntos E y H determinarán la paralela CD.

252. **Dividir una recta dada en un cierto número de partes iguales ó proporcionales.**—Sea la recta AB (fig. 106, lámina 4): por los extremos A y B de esta recta se tiran las paralelas indefinidas AC y BD, sobre las cuales se toman, á partir de A y B, tantas partes de igual magnitud como expresa el número en que se ha de dividir la AB, colocando jalones en los puntos de división. Estos jalones determinarán un sistema de rectas paralelas entre sí, cuyas intersecciones *a*, *b*..... con la AB, resuelven el problema.

Cuando sólo se trata de dividir una recta en dos partes iguales, se puede conseguir por una perpendicular (246).

253. Esta misma marcha se sigue para dividir una recta en partes proporcionales. En el caso en que haya que dividirla en dos, proporcionales á números dados, 3 y 5 por ejemplo, se toman estos mismos números de partes iguales en las paralelas AC y BD (fig. 107, lám. 4), uniendo después los puntos C y D. La intersección M de CD con la recta dada divide á ésta en la proporción pedida.

254. **Dadas dos rectas que se cortan en un punto, trazar por otro invisible desde él la recta que los une.**—Tírese por el punto dado D (fig. 108, lám. 4) la línea arbitraria BC, que cortará á las rectas dadas en los puntos B y C; tómese en la BD otro cualquiera *b*, y determínese el *c* por la proporción

$$BD : DC : : Db : Dc;$$

en el punto *b* fórmese el ángulo $Dbb' = DBA$, y en el *c* el $Dcc' = DCA$; el punto de intersección *a* de las rectas $bb'$ y $cc'$ pertenecerá á la recta DA, pudiéndose determinar del mismo modo los puntos que se quiera.

255. Con la escuadra se resolvería tirando desde el punto dado D (fig. 108, lámina 4) perpendiculares á las rectas dadas, las que se dividirían como hemos indicado para los segmentos BD y DC, y levantando perpendiculares á las primeras por los puntos de división, que determinarían con su punto de encuentro la alineación pedida.



256. **Dividir un ángulo en dos partes iguales.**—Se mide el ángulo CAB (fig. 109, lám. 4), y tomando su mitad en el instrumento, haciendo con precisión la coincidencia del nonius, se asegura la alidada móvil en esta posición, y se coloca un jalón D en la dirección de la visual. Este jalón determina, con el punto de estación, la dirección de la bisectriz del ángulo. Para comprobar se dirige la alidada fija al punto D, y si la visual tirada entonces por la móvil va á parar á B, el ángulo estará bien dividido. En el caso contrario, se dirige esta última al punto B, y se planta otro jalón por la alidada fija. Un tercer jalón equidistante de los dos que se han situado dará el punto de la bisectriz, que puede comprobarse como en el primer caso.

Aplicando el mismo procedimiento á cada una de las mitades halladas, se tendrá dividido el ángulo BAC en cuatro partes iguales, y así sucesivamente en 8..... 16..... 32.....

257. Se resuelve gráficamente este problema con la plancheta, siguiendo la misma marcha.

258. Con la cuerda ó cadena, tómense á partir del vértice A (fig. 109, lám. 4) en los lados del ángulo, las distancias iguales AB, AC, y hállese después el punto medio D de la BC, el cual, unido con el A, da la dirección de la bisectriz del ángulo BAC.

259. **Aplicación de los problemas precedentes al trazado y medición de las alineaciones.**—Muchas veces se hace imposible la aplicación de los procedimientos explicados en el capítulo anterior para el trazado y medición de las alineaciones, ya por ser inaccesible alguno de los puntos que las determinan, ya por obstáculos que las interceptan, impidiendo recorrerlas en toda su extensión, ó bien ocultando á la vista las señales que determinan sus diferentes púntos. Es preciso entonces obtenerlas de una manera indirecta, con el auxilio de los problemas que acabamos de resolver. Pasemos á la exposición de los casos que con más frecuencia ocurren en la práctica.

260. **Medida indirecta de una alineación interceptada por un obstáculo, ó inaccesible por uno de sus extremos.**—Se determina la magnitud de AB (fig. 110, lám. 4) eligien-

do un punto exterior C y resolviendo el triángulo ABC, después de haber medido el ángulo C y los lados AC y CB, ó bien el lado AC y los ángulos adyacentes A y C, si el lado CB no puede medirse porque algún obstáculo lo impida. El mismo procedimiento se seguiría con la brújula determinando los ángulos como hemos dicho (175).

261. Con la plancheta, después de medida una línea cualquiera EF (fig. 111, lám. 5), homóloga de la *fe* que se toma con la escala, y tomados con la plancheta en *f* y *e* los ángulos DFE y DEF, se verá el valor de *de* en la escala adoptada para la transportación de la EF á la plancheta, y se tendrá la medida indirecta de la parte interceptada DE.

262. Con la escuadra pueden emplearse los procedimientos siguientes:

1.° Para determinar la YL (fig. 112, lám. 5), se levantará en L una perpendicular LN, que se medirá; otra perpendicular MN á la YN, y se hallará su punto de intersección M con la LM: midiendo esta última línea, se tendrá la proporción

$$ML : NL :: NL : YL;$$

que nos dará la medida indirecta de la YL.

2.° Para la OQ (fig. 113, lám. 5) se puede también trazar una recta OP, y sobre esta la perpendicular PQ; se medirán OP y PQ, y el triángulo rectángulo OPQ dará

$$OQ = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2}.$$

Si el obstáculo fuese de tal naturaleza que no permitiese trazar la OP, se bajarían las perpendiculares OO′ y QP′ sobre otra base O′P, y midiendo estas tres líneas se tendría:

$$OQ = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{\overline{O'P'}^2 + (QP' - OO')^2}.$$

3.° Para medir la RZ (fig. 114, lám. 5) se levantará en R una perpendicular RT, y en T otra TX á la RT; trazando la alineación que pasa por Z y el punto medio S de la RT, y prolongándola hasta que encuentre á la perpendicular TX, los triángulos iguales RZS y STX darán TX, que se podrá medir, y se tendrá el valor de su igual RZ. Puede hacerse á XT la parte alícuota cualquiera de RZ que ST lo sea de SR.



4.° También puede buscarse por tanteos un punto S (fig. 114, lám. 5), desde el cual se divisasen R y Z por las alidadas que forman el ángulo de 45°, con lo que resultaría RS = RZ.

263. Por alineaciones supongamos que se trata de conocer la longitud de QR (fig. 115, lám. 5): tómese en la parte accesible y en su prolongación una longitud cualquiera QP, y trácese á arbitrio en dirección y magnitud la PZ; por el punto S medio de la PZ y por el Q trácese la QSX, tomando SX igual á QS, y se tendrán los puntos X y Z para trazar una recta ZXT hasta que encuentre á la RS prolongada en el punto T; los triángulos iguales STX y SQR dan TX = QR.

264. **Medida de las alineaciones completamente inaccesibles.**—Para hallar la longitud de una recta AB (fig. 116, lámina 5) completamente inaccesible, se mide en el terreno accesible una base CD, cuyos extremos sean visibles entre sí y se vean desde ambos los puntos A y B. Mídanse además los ángulos ACD, BCD, CDA, CDB, que forman con la base las visuales tiradas á los extremos de AB. Resolviendo los triángulos ADC, BDC, se hallarán los valores de los lados CA, CB y el del ángulo comprendido ACB = ACD — BCD, con lo que podrá resolverse el triángulo ACB y obtener el valor de AB. Supongamos que ha resultado CD = $394^m,82$; BCD = 28° 40′ 50″; ACD = 75° 28′ 40″; CDA = 41° 10′ 30″ y CDB = 83° 11′ 20″. Se obtendrá AC = $290^m,74$; CB = $422^m,37$; ACB = 46° 48′, y AB = $307^m,89$.

265. La construcción geométrica de los triángulos nos daría, para los datos tomados con los goniómetros y con la brújula construyendo los rumbos, la medida gráfica de la alineación, la cual se obtiene directamente con la plancheta, trazando en ella la base *cd* (fig. 117, lám. 5) y construyendo los ángulos (197), haciendo estación sucesivamente en los extremos *c* y *d* de la base medida en el terreno: las intersecciones de las rectas que los determinan darán la *ab* homóloga de AB, y podremos apreciar su longitud en la escala elegida para trazar la base *cd*.

266. La escuadra puede también emplearse en la resolución del problema que nos ocupa. Sea AB (fig. 118, lám. 5) la recta dada: se elegirá una base CD en la parte del terreno en que se pueda operar libremente, y se bajarán sobre ella desde los puntos A y B las perpendiculares AC y BD, que se prolongarán hasta su encuentro en los puntos E y F con las líneas AF y BE, trazadas por los puntos A y B y el medio O de la base CD. Se trazará y me-

dirá la EF, que es igual y paralela á la AB. En efecto, los triángulos rectángulos iguales AOC y ODF dan AC = DF, y los BOD y COE, también iguales, dan CE = BD; de donde se deduce AE = BF, siendo además paralelas estas rectas, por ser perpendiculares á CD; luego ABFE es un paralelogramo.

Si el terreno no permite operar con esta extensión, se toman *Oc* y *Od*, iguales á las mitades de OC y OD, se levantan las perpendiculares *ac* y *bd* á la CD, prolongándolas hasta su encuentro con AO y OB, también prolongadas, y resultará *ab* igual á la mitad de AB, por la semejanza de los triángulos *Oca* y OCE, *Obd* y ODF, de la que resulta la de *Oab* y OEF, ó su igual OAB. Los puntos *c* y *d* pueden ser en caso necesario otra parte alícuota cualquiera de OC, ó de su igual OD.

También puede resolverse haciendo que OB y OA (fig. 118, lámina 5), sean perpendiculares entre sí, y eligiendo los puntos E y F, que formen ángulos de 45°, con lo que se tendrá

$$OA = OE \quad y \quad OB = OF; \qquad (262 - 4.^o)$$

y por tanto

$$AB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}.$$

267. Por alineaciones se trazarán desde el punto C (fig. 119, lámina 5), dos rectas CD y CE, y se dirigirán las alineaciones CA y CB, así como las DA y BE desde los puntos D y E; tomando C*m* y C*n* que sean respectivamente la misma parte alícuota de CD y CE, y tirando por *m* y *n* las paralelas *am* y *nb* á las AD y BE (251) y uniendo los puntos *a* y *b* por una recta, ésta será la misma parte alícuota de AB. Midiendo, por lo tanto, la *ab*, no habrá más que multiplicar el resultado por el número que indique las veces que deba estar contenida en la AB, y se tendrá el valor de esta recta.

268. **Determinación de puntos intermedios de una línea cuyos extremos son invisibles entre sí.**—Sean A y B (fig. 120, lámina 5) los extremos de la alineación: se hará estación en un punto C, desde el cual se vean estos extremos; se medirán el ángulo ACB y las líneas AC y BC, y se calculará el ángulo BAC del triángulo ACB para conocer la dirección de AB: marcando con jalones una línea indefinida cualquiera C*d*, se medirá el ángulo AC*d*, con lo cual se podrá calcular el lado CD del triángulo ACD, y tomando en C*d* una parte igual á CD, el punto D pertenecerá á



la línea AB, pudiéndose determinar del mismo modo otro punto cualquiera E.

Si no se hallase un punto de estación desde el cual pudieran verse los A y B, se elegirá uno C, desde el cual pueda verse uno de los extremos B, y otro F desde el cual se vean el otro extremo A de la recta y el punto de estación C. Se medirán las distancias AF, FC, BC y los ángulos AFC y FCB: se calcularán el lado AC y el ángulo ACF del triángulo AFC, y como entonces tendremos conocidos en el triángulo ACB los lados AC y BC y el ángulo ACB = BCF — ACF, se reducirá la cuestión al caso anterior.

La resolución del triángulo ACB nos dará la medida indirecta de AB. Si el ángulo A fuese de 45°, y la BC perpendicular á la AC, se tendría

$$AC = BC, \text{ y } AB = \sqrt{2\overline{AC}^2}.$$

269. Con la brújula se trazan desde A las rectas AD y AC (fig. 121, lám 5), anotando sus correspondientes rumbos, y trasladando la brújula al punto B, trácense también líneas del mismo rumbo en el sentido conveniente para que corten á las primeras, determinando los puntos de intersección D y C, con lo cual se tendrá el paralelogramo ACBD. Trazando la diagonal CD, su punto medio E pertenecerá á la recta AB: dividiendo en dos partes iguales las BC y DB, se trazarán por sus puntos medios H y F las rectas CF y DH, se hallará su intersección G y este será otro punto intermedio de la recta AB. Conocidos los puntos E y G y colocando en ellos jalones, se podrá trazar la recta AB.

270. Para hacer uso de la escuadra elíjase un punto C (figura 105, lám. 4), desde el cual se descubran los extremos A y B de la recta, y trácense las CA y CB; en los puntos D y E medios de AC y BC colóquense jalones que servirán para trazar una recta HM, que será paralela á AB, sobre la cual se bajarán las perpendiculares AH y BM, que, medidas, deben resultar iguales; levantando después en los puntos D y E, perpendiculares á la HM y tomando en ellas las partes DF y EG, iguales á AH ó BM, tendremos los puntos intermedios F y G de la recta AB, que nos servirán con los A y B para completar el trazado á derecha é izquierda del obstáculo.

La medida de la HM nos dará la longitud de AB.

271. Por alineaciones se pueden determinar las partes AF y GB