dirá la EF, que es igual y paralela á la AB. En efecto, los triángulos rectángulos iguales AOC y ODF dan AC = DF, y los BOD y COE, también iguales, dan CE = BD; de donde se deduce AE = BF, siendo además paralelas estas rectas, por ser perpendiculares á CD; luego ABFE es un paralelogramo.

Si el terreno no permite operar con esta extensión, se toman *Oc* y *Od*, iguales á las mitades de OC y OD, se levantan las perpendiculares *ac* y *bd* á la CD, prolongándolas hasta su encuentro con AO y OB, también prolongadas, y resultará *ab* igual á la mitad de AB, por la semejanza de los triángulos *Oca* y OCE, *Obd* y ODF, de la que resulta la de *Oab* y OEF, ó su igual OAB. Los puntos *c* y *d* pueden ser en caso necesario otra parte alícuota cualquiera de OC, ó de su igual OD.

También puede resolverse haciendo que OB y OA (fig. 118, lámina 5), sean perpendiculares entre sí, y eligiendo los puntos E y F, que formen ángulos de 45°, con lo que se tendrá

$$OA = OE \quad y \quad OB = OF; \qquad (262 - 4.^{\circ})$$

y por tanto

$$AB = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2}.$$

267. Por alineaciones se trazarán desde el punto C (fig. 119, lámina 5), dos rectas CD y CE, y se dirigirán las alineaciones CA y CB, así como las DA y BE desde los puntos D y E; tomando C*m* y C*n* que sean respectivamente la misma parte alícuota de CD y CE, y tirando por *m* y *n* las paralelas *am* y *nb* á las AD y BE (251) y uniendo los puntos *a* y *b* por una recta, ésta será la misma parte alícuota de AB. Midiendo, por lo tanto, la *ab*, no habrá más que multiplicar el resultado por el número que indique las veces que deba estar contenida en la AB, y se tendrá el valor de esta recta.

268. **Determinación de puntos intermedios de una línea cuyos extremos son invisibles entre sí.**—Sean A y B (fig. 120, lámina 5) los extremos de la alineación: se hará estación en un punto C, desde el cual se vean estos extremos; se medirán el ángulo ACB y las líneas AC y BC, y se calculará el ángulo BAC del triángulo ACB para conocer la dirección de AB: marcando con jalones una línea indefinida cualquiera C*d*, se medirá el ángulo AC*d*, con lo cual se podrá calcular el lado CD del triángulo ACD, y tomando en C*d* una parte igual á CD, el punto D pertenecerá á



la línea AB, pudiéndose determinar del mismo modo otro punto cualquiera E.

Si no se hallase un punto de estación desde el cual pudieran verse los A y B, se elegirá uno C, desde el cual pueda verse uno de los extremos B, y otro F desde el cual se vean el otro extremo A de la recta y el punto de estación C. Se medirán las distancias AF, FC, BC y los ángulos AFC y FCB: se calcularán el lado AC y el ángulo ACF del triángulo AFC, y como entonces tendremos conocidos en el triángulo ACB los lados AC y BC y el ángulo ACB = BCF — ACF, se reducirá la cuestión al caso anterior.

La resolución del triángulo ACB nos dará la medida indirecta de AB. Si el ángulo A fuese de 45°, y la BC perpendicular á la AC, se tendría

$$AC = BC, \text{ y } AB = \sqrt{2\overline{AC}^2}.$$

269. Con la brújula se trazan desde A las rectas AD y AC (fig. 121, lám 5), anotando sus correspondientes rumbos, y trasladando la brújula al punto B, trácense también líneas del mismo rumbo en el sentido conveniente para que corten á las primeras, determinando los puntos de intersección D y C, con lo cual se tendrá el paralelogramo ACBD. Trazando la diagonal CD, su punto medio E pertenecerá á la recta AB: dividiendo en dos partes iguales las BC y DB, se trazarán por sus puntos medios H y F las rectas CF y DH, se hallará su intersección G y este será otro punto intermedio de la recta AB. Conocidos los puntos E y G y colocando en ellos jalones, se podrá trazar la recta AB.

270. Para hacer uso de la escuadra elíjase un punto C (figura 105, lám. 4), desde el cual se descubran los extremos A y B de la recta, y trácense las CA y CB; en los puntos D y E medios de AC y BC colóquense jalones que servirán para trazar una recta HM, que será paralela á AB, sobre la cual se bajarán las perpendiculares AH y BM, que, medidas, deben resultar iguales; levantando después en los puntos D y E, perpendiculares á la HM y tomando en ellas las partes DF y EG, iguales á AH ó BM, tendremos los puntos intermedios F y G de la recta AB, que nos servirán con los A y B para completar el trazado á derecha é izquierda del obstáculo.

La medida de la HM nos dará la longitud de AB.

271. Por alineaciones se pueden determinar las partes AF y GB

(fig. 105, lám. 4) de la línea AB, tomando un punto C en el terreno desde el cual se vean los extremos accesibles A y B; se trazarán y medirán las AC y CB, y tomando las EC y CD iguales á la mitad de CB y CA, y trazando la DE, no habrá más que tirar á ésta por A y B las paralelas AF y GB, que estarán en la alineación AB. Midiendo además la DE, la proporción

DC : CA : : DE : AB

nos dará la medida indirecta de la alineación AB.

272. **Caso en que la extensión de la línea es considerable.**—Si la naturaleza del terreno ó de los obstáculos no permite descubrir uno de los extremos desde el otro, ni hallar puntos intermedios desde donde se descubran los A y E (fig. 122, lám. 5) de la alineación AE, se envía un peón á uno de los extremos E de la recta, con el fin de que á una hora dada haga una señal, bien disparando un arma de fuego ó haciendo una hoguera. El otro peón que se halla en A ó próximo á este punto, coloca un jalón A y otro *a* de modo que se halle en la dirección probable de la señal, y por medio de ellos irá estableciendo los demás jalones *c*, *d*....., procurando que las visuales tiradas en sentido perpendicular á la alineación aproximada A*abc*..... que se va trazando y midiendo al mismo tiempo, salven los obstáculos. Cuando se llegue á un punto desde el cual se descubra E, se bajará con la escuadra una perpendicular E*e* á la AB que se medirá, concluyendo también la medida de la base A*e*. Falta solamente rectificar las posiciones de los jalones *a*, *b*, *c*....., para lo cual se levantarán en los puntos *a*, *b*, *c*..... las perpendiculares indefinidas *aa′ bb′*..... moviendo en sentido de la línea AB cualquier jalón *d*, desde el cual la perpendicular *dd′* no salve el obstáculo, y haciéndole tomar una nueva posición *d″* para levantar la perpendicular *d″ d‴*; entonces, por medio de las proporciones

$$Ae : Ee : : Aa : aa'; \qquad [26]$$
$$Ae : Ee : : Ab : bb';$$
. . . . . . .

se tendrán hallados los puntos *a′*, *b′*..... de las perpendiculares donde se habrán de trasladar los jalones *a*, *b*, *c*....., debiendo examinar después si se hallan colocados en el mismo plano vertical.

Lo mismo resultaría teniendo la E*e* una posición oblicua á la AB, trazando las *aa′*, *bb′*..... paralelas á la E*e*.



La operación se simplifica, y basta sólo la primera proporción [26], cuando al establecerse los jalones *a*, *b*..... se pueden colocar de 50 en 50 ó de 100 en 100 metros, de modo que A*a*=*ab*=*bc*..., pues entonces se tiene A*b*=2A*a*, y *bb′*=2*aa′*; A*c*=3A*a*, y *cc′*=3*aa′*... y así sucesivamente.

La medida indirecta de la recta AE se obtendrá, después de medir A*a′*, por la proporción A*a* : A*e* :: A*a′* : AE.

273. **Prolongación de las alineaciones á traves de un obstáculo.**—Puede conseguirse por medio de resolución de triángulos de un modo análogo al que hemos indicado (268), y también se puede prolongar la AB (fig. 123, lám. 5) sin resolver el triángulo BEC: formando un ángulo cualquiera CBE y tomando un punto E á arbitrio en la BE, se hará el ángulo BEC=ABE—CBE: tomando CE=BE y haciendo en C el ángulo BCE=EBC ó ECD=ABE, se tendrá la CD prolongación de la AB. Para la mayor exactitud conviene tomar el punto E á bastante distancia de la AB.

Si se quiere además conocer la longitud de la BC se podrá resolver por el cálculo ó por la geometría el triángulo BEC. También se podrá evitar la resolución de este triángulo haciendo el ángulo CBE de 45°, y trazando la CE perpendicular á la BE; pues entonces resulta CE=BE, hallando BC como se ha dicho ya (268).

274. Con la brújula trácese un triángulo BFC (fig. 124, lám. 5) y una recta FD que vaya á parar al otro lado del obstáculo. Mídanse las BF y CF y tómense los puntos medios *b* y *c*, por medio de los cuales se trazará la *bcd* determinando su punto de intersección *d* con la FD; tómese D*d*=F*d*, hállese el rumbo de la AB, y trasladando la brújula al punto D se establecerán jalones en dirección de la visual que forme el mismo rumbo. Midiendo la *cd* y doblando su valor se tendrá la medida indirecta de la parte CD interceptada por el obstáculo.

275. En el caso particular de hallarse en la alineación un objeto muy elevado como la veleta de una torre M, se suspende el trazado en un punto C antes del obstáculo, y trasladando la brújula al otro lado se busca por tanteos otro D desde el cual la visual dirigida á M tenga el rumbo hallado, prolongándola con el mismo rumbo. Este procedimiento es expedito cuando no se trata de conocer la magnitud CD interceptada por el obstáculo.

276. Haciendo uso de la escuadra para prolongar la AF (figura 105, lám. 4) se levantará en el punto F una perpendicular FD á esta línea, dándole la longitud necesaria para que la perpendicular

DE á ella resulte trazada fuera del obstáculo. Se elige después un punto E de esta última de modo que satisfaga también á la condición de que la perpendicular EG á DE salve el obstáculo: y haciendo EG=FD, se tirará por el punto G la perpendicular GB á EG, la cual resultará en prolongación de AF. En efecto, siendo AF y GB paralelas entre sí por serlo ambas á la DE, distando igualmente de esta y hallándose situadas en la misma región del plano con respecto á ella, no son más que una sola y misma recta AB. También se puede resolver este problema levantando en A y F las perpendiculares iguales AH, DF, trazando la alineación HD, y levantando perpendiculares iguales AH, DF, trazando la alineación HD, y levantando perpendiculares á ella en los puntos E y M de su prolongación. Haciendo EG=MB=DF, los puntos G, B, así obtenidos determinarán la prolongación pedida.

277. Este problema se aplica en las poblaciones á la rectificación de las calles tortuosas, y al establecimiento de las líneas de fachada de los edificios con arreglo al plano de las alineaciones previamente establecido.

278. También se puede hacer uso de la escuadra levantando en B (fig. 125, lám. 5) una perpendicular BC á la alineación dada AB y la CD á la AC; los triángulos semejantes ABC y ACD dan la proporción

AB : BC :: AC : CD;

y se obtendrá el punto D, pudiéndose hallar otro nuevo punto del mismo modo.

La medida de la BD se obtendrá por la proporción

AB : BC :: BC : BD;

que resulta de los triángulos ABC y BCD, semejantes también.

279. Con el auxilio de las alineaciones, se prolongará AB (figura 126, lám. 5) trazando dos rectas AE y BE, que se encuentren en un punto E desde el cual se vea la parte que se halla al otro lado del obstáculo: se tomarán las EF y EG que sean la misma parte alícuota de las AE y BE, y los jalones colocados en los puntos F y G servirán para el trazado de la FL, que será paralela á la AD. Se trazarán las EC y ED en una dirección cualquiera al otro lado del obstáculo, se hallarán sus puntos de intersección H y L con la FL, y en la serie de razones iguales

EF : EA : : EG : EB : : EH : EC : : EL : ED



se podrán conocer EC y ED, y por lo tanto los puntos C y D de la prolongación, supuesto que todas las demás líneas se pueden medir.

El valor de BC se determinará por la proporción

EG : GH : : EB : BC.

280. **Prolongación de una recta completamente inaccesible.**—Si AB (fig. 127, lám. 5) ha de prolongarse en el terreno accesible, se podrá hallar otro punto cualquiera E de la prolongación, resolviendo como auxiliar el problema de medir la AB con los goniómetros ó con la plancheta (264), y al resolver el triángulo ABH con este fin, hallaremos también el ángulo ABH, y entonces como el HBE es igual á 180°—ABH y el BHM se puede medir, se conocerá en el triángulo BHE la base BH y los ángulos adyacentes; resolviéndole para hallar HE, se tomará esta distancia horizontal en el terreno, se formará en el punto E el ángulo DEH, suplemento de la suma de los otros dos, y se tendrá la prolongación DE de la recta AB.

281. **Problemas acerca de la determinación de rectas y de ángulos inaccesibles.—Medir un ángulo horizontal cuyo vértice es inaccesible.**—Sea el ángulo ABC (fig. 128, lámina 5) en cuyo vértice no es posible colocar el instrumento; se levantarán en uno de sus lados AB dos perpendiculares de igual magnitud *mn*, *m'n'*, y por los puntos *n* y *n'* se trazará la *ab*, que será paralela á AB, y midiendo el ángulo *ab*C se tendrá conocido su igual ABC.

Haciendo uso de la brújula no hay necesidad de establecer primero la paralela á uno de sus lados; pues bastaría tomar los rumbos de los AB y BC, de los que se deduciría (175) el valor del ángulo ABC.

También se resuelve este problema con mucha facilidad estableciendo una base AB (fig. 129, lám. 5), y hallando el valor de los ángulos A y B, cuya suma, restada de 180°, da el valor del angulo inaccesible C.

282. **Medir un ángulo horizontal en que el vértice y uno de los lados son inaccesibles.**—Sea el ángulo ABG (figura 127, lám. 5) siendo sólo accesible el lado BG en su extremo G: elíjase un punto H desde el cual sean visibles los A, B y G; determínese la base GH, y háganse las mismas operaciones que para medir la recta inaccesible AB; y al resolver el triángulo AGB se hallará el valor del ángulo ABG que se buscaba.

283. **Medir un ángulo horizontal completamente inaccesible.**—Supongamos primero que el ángulo ACB (fig. 130, lám. 5) sea saliente: se elegirán en el terreno accesible dos puntos D y E visibles y accesibles entre sí, tales que desde el punto D sean visibles los B, C y E, y que además dicho punto D se halle en el plano vertical que pasa por BC; debiendo reunir también el punto E las mismas condiciones respecto á los A, C y D. Mídanse los ángulos horizontales CDE y CED, y restando de 180° la suma de estos ángulos se tendrá el valor del DCE ó de su igual ACB.

También puede hallarse en su caso más general, averiguando la magnitud de los tres lados del triángulo determinado por los puntos A, B y C (264), con lo que podrá resolverse el triángulo y hallar el valor del ángulo que se necesita conocer.

284. **Dada una recta** AB (fig. 131, lám. 5) **accesible solamente por uno de sus extremos** B, **determinar la dirección y magnitud de la perpendicular** DC, **bajada á dicha recta desde un punto accesible** C.—Mídase el ángulo horizontal ABC, y suponiendo trazada la CD se conocerá el ángulo BCD del triángulo rectángulo DCB; fórmese este ángulo en el punto C y se conocerá la dirección de la CD. Midiendo la distancia horizontal BC se podrá resolver dicho triángulo, y se tendrá la magnitud de la CD.

Las partes BD y AD se pueden conocer también: la primera por el triángulo BCD, y la segunda resolviendo el ADC en el cual se conoce DC, el ángulo recto ADC y el ACD, que es igual al ángulo horizontal ACB, que se puede medir, menos el DCB que ya se conoce.

285. **Dada una recta** AB (fig. 131, lam. 5) **accesible solamente por uno de sus extremos** B, **determinar la magnitud de la perpendicular** DC, **bajada á la misma desde un punto inaccesible** C.—Tómese otro punto E desde el cual se descubran los A, B y C, y sea visible y accesible el punto B: midiendo la base horizontal BE, háganse las mismas operaciones que si se tratase de medir la AC que tiene sus extremos inaccesibles. Cuando se tenga resuelto el triángulo ABC se determinará la magnitud de la CD y también se podrán hallar las partes AD y DB.

286. **Dada una recta inaccesible** AB (fig. 116, lám. 5), **tirarle una paralela por un punto accesible** C.—Elíjase un punto D desde el cual sean visibles los A, B y C: tomando la CD como base, háganse las mismas operaciones que si se tratase



de medir la AB y en el triángulo ABC determínese el ángulo ABC, por medio del cual se podrá tirar en el punto C la paralela CE (247).

287. **Hallar la bisectriz de un ángulo inaccesible.**—Tírese una línea cualquiera AB (fig. 129, lám. 5) determinando sus intersecciones con los lados del ángulo, y mídanse los ángulos CAB y CBA, teniéndose entonces

$$\text{CAB} + \text{CBA} = 180° - \text{C}.$$

Para determinar el punto D que satisfaga á la condición de ser CA = CD, será preciso calcular el valor del ángulo CAD ó de su igual CDA; pero en el triángulo isósceles ADC se tiene que verificar la ecuación

$$2\text{CAD} = 180° - \text{C};$$

y de las dos ecuaciones halladas resulta entonces

$$\text{CAD} = \frac{\text{CAB} + \text{CBA}}{2};$$

formando este ángulo en el punto A, se tendrá la verdadera dirección de la AD y se podrá hallar su intersección con la CD. Dividiendo la AD en dos partes iguales, su punto medio E determinará con C la bisectriz pedida. Si C no es visible desde E se podrá tirar una paralela á la AD desde otro punto cualquiera de la CA, y se hallará su punto medio que con el E dará la dirección de la bisectriz.

288. **Levantamiento de los planos.**—Hemos dicho (42) lo que se entiende por *plano geométrico ó topográfico*, y el objeto que se propone la *planimetría* (40). Para obtener el plano de un terreno, la cuestión está reducida á la determinación absoluta y relativa de cierto número de sus puntos principales, por medio de los cuales sea fácil hallar las de todos los demás; pero antes nos ocuparemos de dar una idea de los varios métodos que están en uso para conducirnos al objeto que nos proponemos.

289. **Determinación de la posición absoluta y relativa de un punto del terreno con relación á dos puntos dados.**—**1.° Por el trazado y medición de dos rectas perpendiculares entre sí.**—Sean A y B (fig. 132, lám. 5) los puntos dados, y C el que se trata de determinar, designando del mismo modo estos puntos en todos los casos que vamos á considerar. Se bajará desde C una perpendicular CD á la AB, que une los puntos dados, y se medirán las distancias AD y CD.

Si no se tuviese en cuenta más que el valor de estas líneas, para hallar en el papel que ha de contener el plano la proyección del punto C, se trazará una recta *ab* que contenga tantas partes de la escala adoptada como unidades tiene la AB, y á partir de los puntos *a* y *b* las *ad* y *bd'* que representan del mismo modo á la AD, por los puntos *d* y *d'* se levantarán perpendiculares indefinidas á la *ab*, y la proyección del punto que buscamos deberá hallarse en las intersecciones de estas perpendiculares con una de las dos paralelas tiradas á la *ab* á una distancia $cd = dc'$, que represente en la escala á la CD; con lo que los puntos $c$, $c'$, $c''$ y $c'''$ satisfarán á la cuestión.

Pero si se expresa además que la magnitud *ad* que ha de representar á la AD ha de contarse desde el origen ó punto de partida *a*, y que *c* ha de hallarse á la izquierda de *ab*, como sucede para C, suponiendo que las operaciones se ejecuten en el sentido AB, como haremos siempre en lo sucesivo, la posición de *c* quedará completamente determinada.

La línea AD y su proyección *ad* se llaman *abscisas*, las CD, *cd*, *ordenadas*, y ambas las *coordenadas* respectivas de los puntos C y *c*. Las líneas AB y *ab* se llaman *ejes de las abscisas*, y también *directrices*.

Del modo explicado se habrá obtenido la posición relativa de los puntos A, C y B; y para obtener la absoluta ó su *orientación*, será necesario hallar el rumbo *r* de la AB, para conocer la dirección que esta línea tiene en el terreno. Cuando los dos puntos dados A y B se hallan en una línea AB situada en la dirección Este-oeste, la perpendicular CD representa la meridiana del punto C.

290. Recíprocamente, dada en el papel la proyección *c*, conocidos en el terreno los A y B, se obtendrá el punto C en la hipótesis del caso directo relativa á su situación, trazando por dichos puntos A y B la recta AB, ó bien desde uno de ellos A la que forma el rumbo *r*, la cual pasará por el otro punto B. Tomando con la cadena la longitud AD que tiene *ad* en la escala, y levantando en D la perpendicular DC de la longitud que marque la *cd*, su extremo C será el punto pedido, en el cual se colocará un jalón ó piquete para fijarle en el terreno. En general, la operacion por medio de la cual se fijan en el terreno y en su verdadera posición los puntos y rectas cuyas proyecciones se hallan en el plano, se llama *replanteo*.

291. Esta resolución es propia de las escuadras, y debemos entenderla en el supuesto de ser accesibles los puntos dados y el que se trata de determinar, y además visibles entre sí.



El método expuesto, aplicado á la determinación de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, y en el cual vemos que solamente hay que trazar y medir líneas perpendiculares entre sí, le llamaremos por *alineaciones perpendiculares*.

292. 2.º—**Por el trazado y medición de dos rectas cualesquiera.**—Se trazarán y medirán las dos rectas AC y BC (figura 133, lám. 5) desde el punto C á los dos dados A y B.

Si sólo se tuviese en cuenta el valor de las distancias AC y BC para hallar en el papel la proyección del punto C, vemos también que habría cuatro soluciones: los dos puntos de intersección *c* y *c'* de las dos circunferencias trazadas, la una desde el extremo *a* de la *ab*, que representa en la escala á la AB, con un radio *ac* que equivalga á AC, y la otra desde el otro extremo *b* con el radio *bc* que represente á la BC: los otros dos puntos serán los $c''$ y $c'''$, intersecciones de otras dos circunferencias iguales á las anteriores y trazadas desde los mismos puntos *a* y *b*, pero tomando los radios en sentido inverso del anterior. Pero se tendrá una sola solución, la *c* por ejemplo, si se indica además que el punto C se halla á la izquierda de la AB y más cerca de A que de B. Conocida su posición relativa, y hallando el rumbo *r* de la AB se tendrá la absoluta que le corresponde.

Recíprocamente, para hallar el punto C del terreno, dada su proyección *c* en el papel, se fijarán en los extremos A y B de la AB, determinada como hemos dicho en el caso anterior, los extremos de dos cuerdas cuyas longitudes sean las que indiquen en la escala las *ac* y *bc*; y poniéndolas tirantes á la izquierda de la AB hasta que se unan los otros dos extremos, el punto de unión será el punto pedido C.

Esta resolución es peculiar de la cadena ó cuerda, piquetes y jalones, debiendo entenderse en el supuesto de ser los tres puntos accesibles y visibles entre sí, y cortas además las distancias que median entre ellos cuando han de replantearse de la manera que acabamos de indicar.

El mismo método, aplicado á la determinación de los vértices y otros puntos cualesquiera de un polígono, cuyas proyecciones pueden obtenerse trazando y midiendo rectas como las AC y BC, suele llamarse *por alineaciones oblicuas*.

293. *Casos particulares*.—Si el punto C (fig. 134, lám. 5) se ha-